

Лекція №3

Робота газу при різних процесах.

У попередніх лекціях ми отримали, що загальна формула для роботи, яку виконує газ, має вигляд

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV \quad . \quad (1)$$

Геометричний зміст цієї формули полягає в тому, що робота визначається площею криволінійної трапеції в осях (p, V) . Т. о., в загальному випадку, для знаходження роботи потрібно проводити інтегрування. Розглянемо конкретні приклади.

Робота газу при ізохорном процесі.

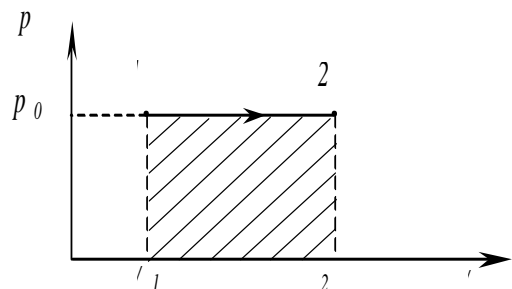
Для ізохорний процесу $V = const$, отже $dV = 0$. Це означає, що при ізохорном процесі газ роботу не виконує

$$A = 0.$$

Робота при ізобарном розширенні ідеального газу

Роботу, чинену газом при ізобарном розширенні, можна знайти, підставивши постійне значення тиску газу p_1 (або p_2 , так як $p_1 = p_2$) в рівняння (1). Отримаємо

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p_1 dV = p_1(V_2 - V_1) = p_1 \Delta V. \quad (2)$$



Мал. 1

Ця робота чисельно дорівнює площі прямокутника $V_1 1 2 V_2$ на Vp схемі ізобарного процесу (Мал. 1).

З'ясуємо фізичний зміст універсальної газової сталої R . З рівняння стану ідеального газу знаходимо $p_1 V_1 = \nu \cdot R \cdot T_1$, $p_2 V_2 = \nu \cdot R \cdot T_2$

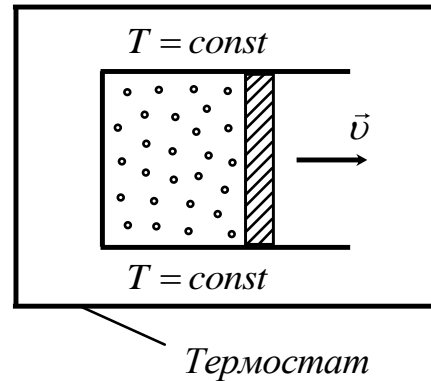
. Порівнюючи це рівняння з (2), бачимо, що

$$A_{12} = \nu R (T_2 - T_1). \quad (3)$$

Якщо $\Delta T = 1 \text{ K}$ і кількість речовини газу дорівнює одному молю, то робота $A = R$, тобто універсальна газова стала R чисельно дорівнює роботі розширення одного моля ідеального газу, коли він нагрівається на один кельвін при сталому тиску.

Робота при ізотермічному розширенні газу

Для здійснення ізотермічного розширення газу, що знаходиться в циліндрі з рухомим поршнем, температура стінок циліндра повинна підтримуватися постійною за допомогою термостата (Мал.2), а поршень повинен переміщатися настільки повільно, щоб газ весь час перебував в тепловій рівновазі зі стінками.



Мал.2

При ізотермічному розширенні кількість теплоти, що отримується газом від термостата, дорівнює роботі, яка здійснюється газом: $\delta Q = \delta A$. Це випливає з рівняння $\delta Q = \nu C_V dT + \delta A$ при $T = const$.

З рівняння стану ідеального газу

$$p = \nu \frac{RT}{V}. \quad (4)$$

Тоді робота при ізотермічному процесі ($T = const$) розраховується як:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = \nu RT (\ln V_2 - \ln V_1).$$

Остаточно одержуємо

$$A_{12} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (5)$$

Якщо врахувати, що $V_1 = \frac{\nu RT_1}{p_1}$ и $V_2 = \frac{\nu RT_2}{p_2}$, то $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\nu RT_2}{p_2} \cdot \frac{p_1}{\nu RT_1} = \frac{p_1}{p_2}$.

Це ж саме можна отримати з рівняння ізотермічного процесу

$$p_1 V_1 = p_2 V_2, \text{ тоді } p_1 / p_2 = V_2 / V_1.$$

Таким чином отримуємо іншу формулу для роботи газу при ізотермічному процесі

$$A_{12} = \nu RT \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right). \quad (6)$$

Робота при адиабатному процесі

Роботу розширення газу при адиабатному процесі знайдемо, підставивши в (1)

тиск $p = \frac{const}{V^\gamma}$. Константу можна знайти з рівняння адиабатного процесу,

поклавши її рівною добутку $p_1 V_1^\gamma$ в початковому стані 1:

$$\begin{aligned} A &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = \\ &= p_1 V_1^\gamma \left. \frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \right|_{V_1}^{V_2} = \frac{p_1 V_1^\gamma}{1-\gamma} (V_2^{-\gamma+1} - V_1^{-\gamma+1}) = \frac{p_1 V_1 V_1^{\gamma-1}}{\gamma-1} (V_1^{1-\gamma} - V_2^{1-\gamma}) = \\ &= \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} (1 - V_1^{\gamma-1} V_2^{1-\gamma}) = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} \left(1 - \frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}} \right). \end{aligned}$$

Таким чином

$$A_{12} = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (7)$$

З урахуванням $p_1 V_1 = \nu R T_1$, можна написати також іншу формулу

$$A_{12} = \frac{\nu R T_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (8)$$

Так як $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$ маємо $\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = \frac{p_2}{p_1}$ або $\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{-1} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{-1}$, тобто

$\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1}$ або $\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \frac{\nu R T_2}{\nu R T_1}$. Тоді $\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1}$ і можемо переписати (8)

$$A_{12} = \frac{\nu R T_1}{\gamma-1} \left[1 - \frac{T_2}{T_1} \right] = \frac{\nu R}{\gamma-1} [T_1 - T_2]. \quad (9)$$

Зауважимо, що з першого початку термодинаміки випливає, що $\delta A = -dU$, але $dU = \nu C_V dT$, отже

$$A_{12} = -\int \nu C_V dT = -\nu C_V (T_2 - T_1) = \nu C_V (T_1 - T_2). \quad (10)$$

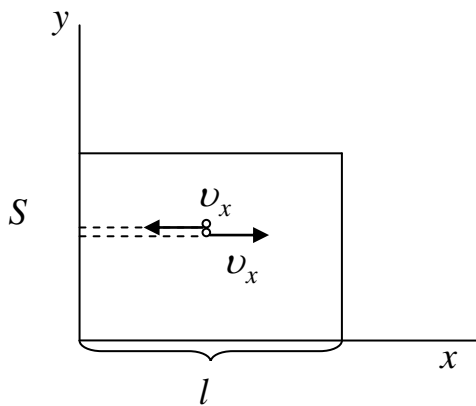
Основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії (МКТ).

Тиском називається відношення нормальної компоненти сили F_{\perp} , що діє на стінку посудини, до площі поверхні стінки S :

$$P = \frac{F_{\perp}}{S}. \quad (11)$$

В СІ тиск вимірюється в паскалях (Па). Один паскаль – тиск із силою в один ньютон на площу в один квадратний метр: $\text{Па} = \text{Н} / \text{м}^2$.

Нехай газ поміщений в прямокутну посудину довжиною l і площею поперечного перерізу S (Мал.1). Знайдемо силу F_{\perp} , діючу на ліву стінку. Для цього помножимо середнє значення сили \bar{F}_x (позначається рискою над символом), що діє на цю стінку з боку однієї молекули на число молекул, що знаходяться в посудині:



Мал.1

$$F_{\perp} = N \bar{F}_x. \quad (12)$$

За другим законом Ньютона, сила F_x дорівнює зміні відповідної компоненти імпульсу Δp_x молекули часу Δt

$$F_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta t}, \quad (13)$$

де

$$\Delta p_x = m_0 v_x - (-m_0 v_x) = 2 m_0 v_x,$$

m_0 - маса однієї молекули.

Так як молекули газу рухаються в обох напрямках осі x , можна вважати, що тільки половина молекул стикається зі стінкою за проміжок часу Δt , необхідний їй для подолання відстані l (довжина судини), тоді

$$F_{\perp} = \frac{N}{2} \frac{\Delta p_x}{\Delta t}. \quad (14)$$

Підставимо сюди $\Delta p_x = 2 m_0 v_x$, а також врахуємо той факт, що за час Δt зі стінкою зіткнуться молекули віддалені від неї на відстані $l = v_x \Delta t$ тоді $\Delta t = l / v_x$, звідси отримуємо

$$F_{\perp} = \frac{N}{2} \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{N}{2} \frac{2 m_0 v_x}{l / v_x} = N \frac{m_0 v_x^2}{l}. \quad (15)$$

Оскільки всі напрямки руху молекул рівноймовірні, то $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$ и $\overline{v^2} = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3 \overline{v_x^2}$, звідки $\overline{v_x^2} = \overline{v^2} / 3$. Отримуємо

$$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot m_0 \overline{v^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot m_0 \overline{v^2} = \frac{1}{3} \cdot n \cdot m_0 \overline{v^2}, \quad (16)$$

Рівняння (16) є основне рівняння молекулярно-кінетичної теорії.

$$P = \frac{1}{3} \cdot n \cdot m_0 \overline{v^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot m_0 \overline{v^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{m \overline{v^2}}{V},$$

де $m = Nm_0$ - маса всіх молекул, тобто маса газу. Тоді маємо

$$PV = \frac{1}{3} \cdot m \overline{v^2}. \quad (17)$$

Помножимо і поділимо другий множник на 2, тоді $PV = \frac{1}{3} \cdot m \overline{v^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{m \overline{v^2}}{2}$.

Остаточно одержуємо

$$PV = \frac{2}{3} \cdot \bar{E}, \quad (18)$$

де $\bar{E} = m \overline{v^2} / 2 = Nm_0 \overline{v^2} / 2$ - сумарна середня кінетична енергія всіх молекул газу.

Внутрішня енергія ідеального газу

В попередньому параграфі ми отримали наступний вираз (у-о МКТ)

$$PV = \frac{1}{3} \cdot m \overline{v^2}.$$

Скористаємося тепер рівнянням стану ідеального газу (рівнянням Клайперона-Менделєєва) $PV = \frac{m}{\mu} RT$, тоді знаходимо $\frac{m}{\mu} RT = \frac{1}{3} \cdot m \overline{v^2}$ або $\overline{v^2} = \frac{3RT}{\mu}$.

Витягаємо квадратний корінь і врахуємо, що $\sqrt{\overline{v^2}} = \overline{v_{кв}}$ називають середньою квадратичною швидкістю, тоді

$$\overline{v_{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Врахуємо що μ - молярна маса газу, в цьому випадку $\mu = m_0 \cdot N_A$, де m_0 - маса однієї молекули газу, а $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ - стала Авогадро і $R = k \cdot N_A$, тоді

$$\overline{v_{кв}} = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot N_A \cdot T}{m_0 \cdot N_A}} = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m_0}}.$$

Звідси, середнє значення кінетичної енергії молекули газу

$$\overline{W_{к}} = \frac{m_0 \cdot \overline{v}^2}{2} = \frac{m_0}{2} \frac{3 \cdot k \cdot T}{m_0} = 3kT / 2.$$

Оскільки матеріальна точка має три ступені свободи, на кожен з них припадає енергія

$$\overline{W}_{\text{ст.св}} = kT / 2.$$

Закон рівномірного розподілу енергії за ступенями свободи молекул стверджує, що в стані термодинамічної рівноваги на кожну ступінь свободи однієї молекули доводиться середня енергія, рівна $kT / 2$.

Кожна молекула газу, до складу якої входить більше одного атома, має, подібно твердому тілу, крім поступальних ще й обертальні ступені свободи. Енергія обертання молекули біля кожної з її головних осей інерції, згідно із законом рівнораспределения енергії, становить $kT / 2$. Повна ж енергія молекули дорівнює

$$\overline{W}_k = \frac{i}{2} kT,$$

де $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{обр}}$ – число її поступальних і обертальних ступенів свободи. Молекули газів, що містять різне число атомів, мають різні енергії, отже, і теплоємності цих газів різні. Молекули одноатомного газу мають три поступальні ступені свободи, на кожну з яких, за законом рівнораспределения енергії, в середньому припадає енергія $kT / 2$, так що внутрішня енергія ідеального газу

$$U = \nu N_A \left(\frac{i}{2} kT \right) = \frac{i}{2} \nu RT.$$

З визначення молярної теплоємності при постійному об'ємі,

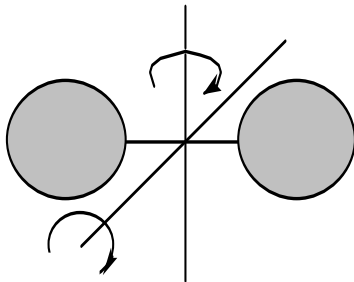
$$C_v = \frac{1}{\nu} \frac{dU}{dT} = \frac{1}{\nu} \frac{d}{dT} \left(\frac{i}{2} \nu RT \right) = \frac{i}{2} R.$$

Згідно з рівнянням Майєра

$$C_p = C_v + R,$$

тоді

$$C_p = \frac{i}{2} R + R = R \left(\frac{i}{2} + 1 \right).$$



Мал.2

Для показника адіабати $\gamma = C_p / C_v$ отримаємо наступний вираз

$$\gamma = R \left(\frac{i}{2} + 1 \right) : \frac{i}{2} R = \frac{i/2 + 1}{i/2} = \frac{i+2}{i} = 1 + \frac{2}{i}.$$

Одноатомні молекули мають тільки три поступальних ступенів свободи. Тому для таких молекул

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{обр}} = 3 + 0 = 3.$$

Двохатомні молекули, як впливає з досвіду, мають додатково два обертальні ступені свободи – навколо

осей, перпендикулярних один одному і осі симетрії молекули, що проходить через центри атомів (див. мал.2). На кожному з них припадає енергія $kT/2$, тому

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} = 3 + 2 = 5$$

Молекули з числом атомів $n \geq 3$ виявляють всі три обертальні ступені свободи. У багатоатомних газів

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} = 3 + 3 = 6.$$

Отримуємо наступну таблицю

X-атомний газ	$i_{\text{пост}}$	$i_{\text{вр}}$	i
одноатомний газ	3	0	3
двоатомний газ	3	2	5
багатоатомний газ	3	3	6

Молярні теплоємності газів визначаються тільки числом атомів у їхніх молекулах. Тому, наприклад, такі гази, як водень і кисень, незважаючи на велику різницю в масах молекул, мають однакові теплоємності. Тепер легко вирахувати значення показника адіабати у різних газів. За формулою

$$\gamma = \frac{i + 2}{i}$$

отримуємо:

у одноатомних $i = 3$ і $\gamma = 1,67$ у двоатомних ($i = 5$) $\gamma = 1,4$. багатоатомних газів ($i = 6$) ще ближче до одиниці і становить $1,33$. Обчислені значення γ добре узгоджуються з досвідченими даними для більшості газів. Відзначимо також наступний факт. Хоча повітря являє собою суміш газів, у багатьох випадках його можна розглядати як двоатомний газ з молярною масою $\mu = 29 \cdot 10^{-3}$ кг / моль.