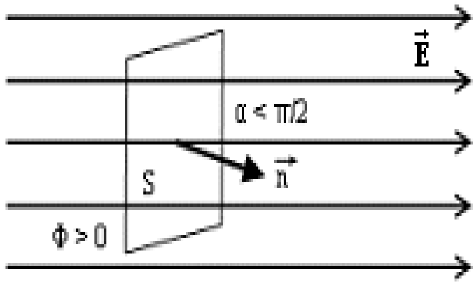
Лекція № 3. Частина 1.

Потік вектора напруженості електричного поля

Електричне поле, задане вектором напруженості $\vec{E}$, називається *векторним полем.* Нехай в цьому полі знаходиться мала площадка S (мал. 3).

На мал. 3 показані лінії напруженості $\vec{E}$,
n – нормаль до площадки *dS* и кут α .



Мал.3

Потіком вектора напруженості електричного поля через елементарну площадку dS, називається добуток модуля вектора напруженості *E* на площу елементарної поверхні і на косинус кута між нормаллю до поверхні:

$$d\Phi_{\mathrm{E}} = E\,dS\cos\alpha$$

Для довільної поверхні S потік вектора E через цю поверхню дорівнює

$$\Phi = \int_S \vec{E}\,d\vec{S} = \int_S E_n\,dS\,.$$

де інтеграл береться по цій поверхні S.
Якщо поверхні S замкнута, то потік вектора E через цю поверхню позначається

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\,d\vec{S}\,.$$

де коло показує, що поверхня S замкнута.
E_n - *Проекція вектора E на нормаль до площадки* dS

$$E_n = E\cos\alpha$$

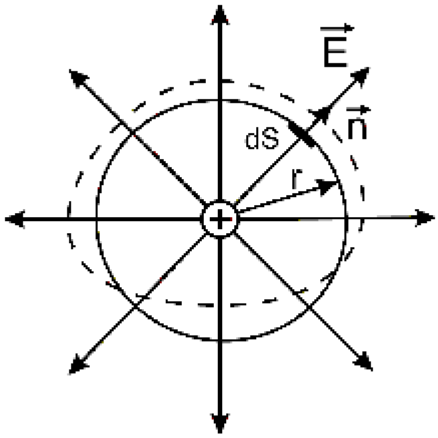
Нормаль до замкнутої поверхні вибирається зовнішня, а потік може бути позитивним або негативним. Підкреслимо, що потік пропорційний числу силових ліній, які пронизують поверхню.

Теорема Остроградского–Гауса.

Теорема Остроградского–Гаусса – основна теорема електростатики. Вона дозволяє обчислити напруженість електричного поля в випадках, коли заряди, що створюють поле, розподілені в просторі будь-яким симетричним чином.

Формулювання теореми Гаусса: потік вектора напруженості електричного поля через довільну замкнену поверхню дорівнює алгебраїчній сумі зарядів, укладених всередині цієї поверхні, поділеній на ε_0:

$$\oint_S (\vec{E}\, d\vec{S}\,) = \frac{q_{внутр}}{\varepsilon_0}$$



Мал 1.

Доведемо теорему Гаусса.

Розглянемо замкнуту поверхню у вигляді сфери радіуса r, в центр якої поміщений точковий заряд q (мал.1). Напруженість електричного поля, створеного точковим зарядом в вакуумі, обчислюється за формулою

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Для сфери r = const, отже, DE = const, а також En = E, так як α = 0. Потік вектора E в цьому випадку дорівнює

$$\Phi = \oint_S (\vec{E}\, d\vec{S}) = \oint \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \oint dS$$

Інтеграл $\oint dS = 4\pi r^2$ - площа сфери радіусом *r*.

$$\oint_S (\vec{E}\, d\vec{S}\,) = \oint_S E\, dS = E \oint_S dS = E \cdot 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

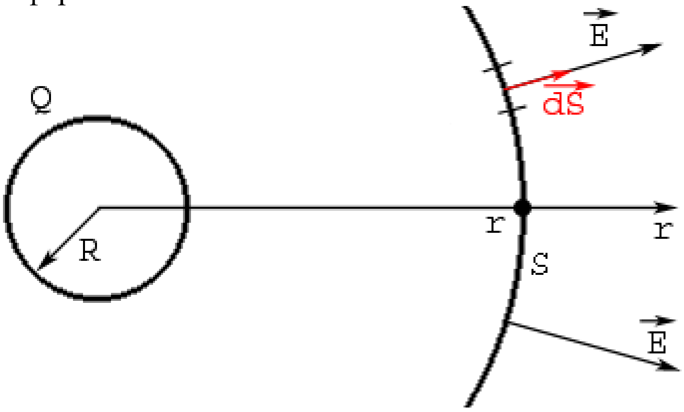
звідки

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}.$$

Якщо всередині замкнутої поверхні знаходиться не один заряд, а кілька, то результуюча напруженість електричного поля знаходиться за принципом суперпозиції. Тоді потоки і заряди складаються алгебраїчно.

Приклади:

1. Розрахуємо **поле зарядженої сфери**. Нехай є заряджена сфера радіуса R з позитивним зарядом Q, знайдемо електростатичне поле цієї сфери на деякій відстані r від її центру. Нехай $r > R$. Проведемо сферу S радіуса r з центром в центрі зарядженої сфери.

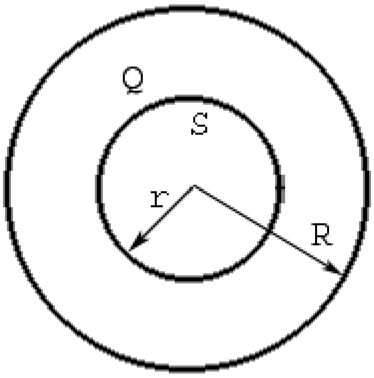


В силу симетричності завдання, очевидно, що поле яке створюється зарядженою сферою на сфері радіуса r всюди однаково по модулю і направлено по радіусу. Тоді потік через цю сферу запишеться так:

$$\Phi = \oint_S \left(\vec{E}d\vec{S}\right) = E\oint_S dS = E4\pi \cdot r^2 \overset{по\,Теор\,Гаусса}{=} \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Звідки - $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Тобто заряджена сфера створює поза собою таке ж поле як і такий же точковий заряд що знаходиться в центрі цієї сфери

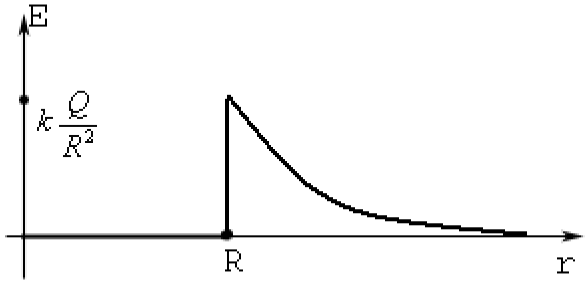
Нехай $r < R$.



Тоді потік через цю сферу запишеться так:

$$\Phi = \oint_S \left(\vec{E} d\vec{S}\right) = E \oint_S dS = E 4\pi \cdot r^2 \overset{\text{по Теор Гаусса}}{=} 0 .$$

Звідки - $\vec{E} = \vec{0}$. Тобто поля всередині зарядженої сфери немає.



2. Електричне **поле зарядженої кулі.**
   За обсягом кулі однорідно розподілений заряд q. Нехтуючи впливом речовини кулі, визначте напруженість електричного поля в довільній точці простору поза кулею і всередині нього. Отриманий результат пред'явіть на графіку $E_r(r)$, де E_r проекція вектора напруженості на вісь r, проведену з центру кулі.

Виконання.

Поле такої системи зарядів центрально-симетричне, тому в якості гаусової замкнутої поверхні слід взяти концентричну сферу радіуса r.

1) Знайдемо напруженість електричного поля всередині кулі $0 \le r \le R$. Вектори напруженості $\vec{E}$ спрямовані по радіусах обраної сфери, а модулі векторів $\vec{E}$ залежать тільки від відстані r до центру сфери, тобто, однакові по поверхні сфери. Тому потік поля вектора $\vec{E}$ через обрану сферу S_1 можна записати $ES_1 = E 4\pi r^2$ (Мал.2а).

Заряд, що охоплюється сферою, дорівнює $q_1 = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$, де $\rho = \frac{q}{4/3 \cdot \pi R^3}$ - об'ємна щільність заряду. Згідно з теоремою Гаусса $E 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0 R^3} r^3$. В результаті напруженість поля всередині однорідно зарядженої кулі дорівнює:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r ,$$

тобто поле E всередині кулі зростає за лінійним законом від нуля в центрі до значення $E = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ на його поверхні.

2) Знайдемо напруженість електричного поля поза кулею $r > R$. Властивість симетрії поля залишається незмінною. Тому гауссову поверхню представимо концентричною сферою S_2 радіусу $r > R$ (Мал.2а). Згідно з теоремою Гаусса маємо: $E 4\pi r^2 = \dfrac{q}{\varepsilon_0}$, де q заряд кулі. Для величини напруженості поля отримаємо:

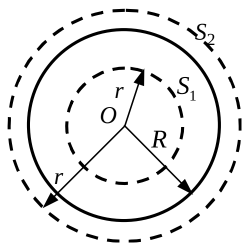
$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

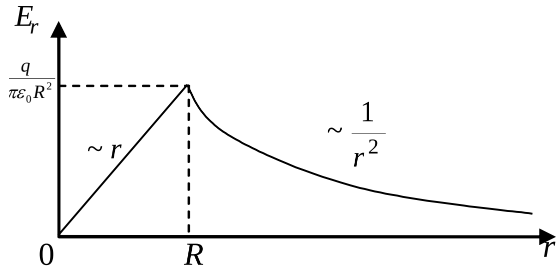
Поле E поза однорідно зарядженої кулі зменшується обернено пропорційно r^2.

Об'єднуючи отримані залежності, запишемо:

$$E(r) = \begin{cases} \dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}, якщо 0 \le r \le R \\ \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, якщо r > R \end{cases}.$$

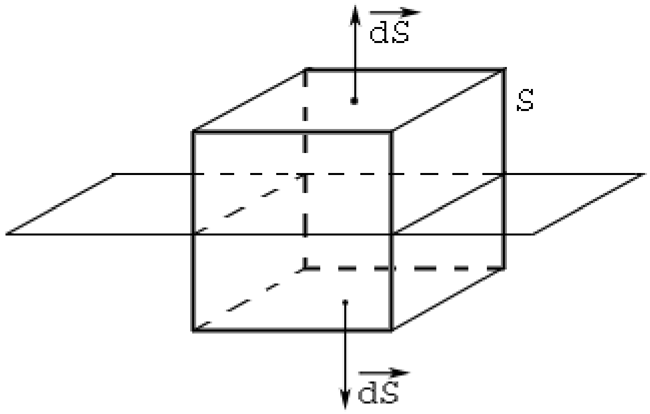
Графік залежності проекції вектора E_r напруженості на вісь r, проведену з центру кулі, представлений на Мал. 2б.





3. Розглянемо поле нескінченної, однорідної, тонкої, **зарядженої площини**.

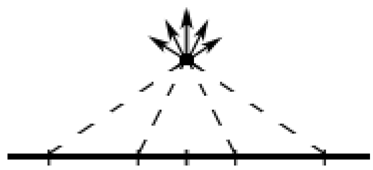
Виберемо площадку ΔS з зарядом Δq. $\lim\limits_{\Delta S \to 0} \dfrac{\Delta q}{\Delta S} = \dfrac{dq}{dS} = \sigma$ - поверхнева щільність заряду. $\sigma = \sigma(\vec{r})$ - загальний випадок. Якщо $\sigma = const$ то площина однорідно заряджена. Розглянемо однорідно заряджену площину, з щільністю заряду σ. Виберемо на ній деякий $d\vec{S}$, мале настільки, що $E_{d\vec{S}}$ можна вважати постійним. Розглянемо паралелепіпед S, такий, що його верхні межі паралельні зарядженої площини і по площі рівні dS, а бічні грані розділені зарядженою площиною навпіл (ребро бічної грані 2h).



Тоді потік через цей паралелепіпед дорівнює

$$d\Phi = d\Phi_{вер} + d\Phi_{ниж} + d\Phi_{бік}.$$

Розглянемо деяку точку що не лежить на даній площині. Опустимо з неї перпендикуляр на дану площину і від отриманої точки відлічимо в різні боки симетричні смужки однакової довжини, малі настільки, що створюване ними поле можна вважати однаковим.



Просумуємо попарно напруженості від всіх смужок. З елементарної геометрії очевидно, що $\vec{E}_{сум}$ розташовується по нормалі до площини. Тоді $d\Phi_{бік}$ =0, тому вектор площі бічної поверхні перпендикулярний напруженості. Але очевидно, що $d\Phi_{вер} = d\Phi_{ниж}$. Звідки

$$d\Phi = 2d\Phi_{вер} = 2E(h)dS \overset{по\_теор\_Гаусса}{=} \frac{\sigma \cdot dS}{\varepsilon_0}.$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Тому поле залежить тільки від σ по модулю однаково в кожній точці.