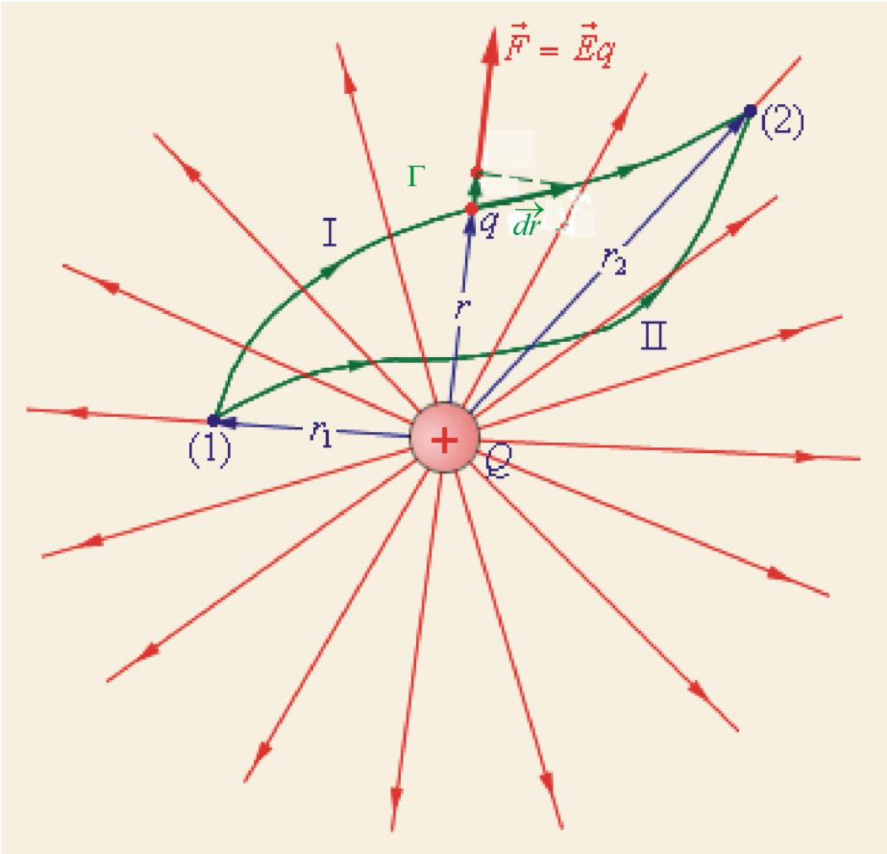
Лекція 3. Частина 2
Потенціал електростатичного поля.

(«Піонером» в цій області вважається Лагранж, який
в 1777 році вперше ввів поняття потенціалу для гравітаційного поля).

Робота сил електростатичного поля по переносу точкового заряду.



Пробний (позитивний і дуже маленький за розміром – це визначення пробного заряду) заряд q повільно (квазистатичний – заряд знаходиться майже в спокої) переміщаємо по шляху Р («гамма-велике») з 1 в 2 в електростатичному полі точкового статичного заряду Q. Знайдемо елементарну роботу сил електростатичного поля цього заряду з переміщення заряду q:

Як відомо з курсу механіки

Елементарна робота сили $\vec{F}$: $dA = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right)$ де $d\vec{r}$ – елементарне переміщення точки прикладання сили $\vec{F}$ **.**

$$dA = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r^3}\left(\vec{r}, d\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r^3} r \cdot dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r^2} dr\,,$$

Тобто $\left(\vec{r}, \vec{r}\right) = r^2$, тоді $\left(d\vec{r}, \vec{r}\right) + \left(\vec{r}, d\vec{r}\right) = 2rdr$ або $2\left(\vec{r}, d\vec{r}\right) = 2rdr;$ $\left(\vec{r}, d\vec{r}\right) = rdr$.

Отже, робота сил електростатичного поля по переміщенню точкового заряду з положення 1 в положення 2 по контуру Р може бути обчислена за формулою:

$$A_\Gamma(1 \to 2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Qq \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Qq \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\boxed{A_{\Gamma(1\to 2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Qq \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

У цій формулі не міститься відомостей про форму траєкторії заряду q, а фігурують тільки координати початку r_1 і r_2 кінця траєкторії, звідки і випливає, що кулонівська сила – консервативна. Поле будь консервативної сили, як відомо, є потенційним.

Перенесемо заряд q в поле кулонівських сил із точки 1 в точку 2 по шляху $1a2$ (рис.2). Чинена при цьому робота дорівнює A_{1a2}. Повернемо заряд в точку 1 по іншій траєкторії $2b1$. Робота складе величину A_{2b1}. Оскільки робота не залежить від форми траєкторії, то $A_{1a2} = A_{1b2} = -A_{2b1}$. Тому сума $A_{1a2} + A_{2b1} = 0$, тобто, робота перенесення заряду по замкнутій траєкторії дорівнює нулю.

Цю роботу можна представити у вигляді інтеграла по замкненому контуру (позначається кружечком на знак інтеграла)

$$\oint_L (\vec{F}\, d\vec{r}\,) = q \oint_L (\vec{E}\, d\vec{r}\,) = 0 .$$

Інтеграл по замкнутому контуру L *от скалярного добутку* $(\vec{E}\, d\vec{r}\,)$ *називається циркуляцією вектора* $\vec{E}$ *по цьому контуру.*

Рівність нулю циркуляції вектора $\vec{E}$ виражає умова потенціальності електростатичного поля:

$$\oint_L (\vec{E}\, d\vec{l}\,) = 0 .$$

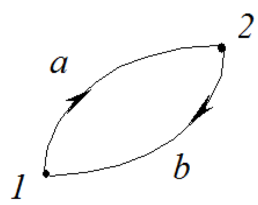


Рис.2

Рівняння є математичним виразом потенційності електростатичного поля.
Тому в електростатичному полі можна ввести поняття потенційної енергії заряду. Однак, на відміну від механіки, в електростатиці вводиться поняття потенціалу поля, під яким розуміється потенційна енергія позитивного заряду в один кулон.
Локальний (диференціальний) признак потенціальності електростатичного поля.
Запишемо без доказу даний признак у вигляді

$$\boxed{\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y};\ \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z};\ \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}}.$$

Символічно цей вираз записують у вигляді

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = 0 ,$$

де ротор вектора $\vec{E}$ визначається наступним чином

$$\mathrm{rot}\,\vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z}\right)\vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x}\right)\vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y}\right)\vec{k} .$$

Те, що виписано – необхідний, а в електростатиці – і достатня ознака потенційності електричного поля в декартовій системі координат. Виконання цих рівностей перевірити на практиці набагато простіше, ніж перевіряти інтегральну ознаку потенційності електростатичного поля.

Потенціал електростатичного поля

Нехай заряд q переноситься в електростатичному полі з точки поля 1 в точку 2. *Різницею потенціалів* $\varphi_1 - \varphi_2$ *між двома точками електростатичного поля називається робота, здійснювана силами поля при переміщенні одиничного позитивного заряду по будь-якому шляху з першої точки в другу:*

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q}.$$

Підставивши сюди, отримаємо

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q} = kQ\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = k\frac{Q}{r_1} - k\frac{Q}{r_2},$$

тобто потенціал поля точкового заряда Q на відстані r від нього:

$$\varphi = k\frac{Q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}.$$

Тепер видалимо точку 2 на нескінченність, де поле відсутнє, і

$$\varphi_1 - \varphi_\infty = \frac{A_{1\infty}}{q}.$$

Покладемо потенціал поля на нескінченності рівним нулю:

$$\varphi_\infty = \lim_{r\to\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = 0.$$

Тоді можна дати визначення потенціалу поля: потенціалом електростатичного поля в даній точці називається робота, чинена силами поля при видаленні одиничного позитивного заряду по будь-якому шляху з даної точки на нескінченність:

$$\varphi = \frac{A}{q}.$$

Потенціал поля є функцією координат і визначається не однозначно, а з точністю до довільної сталої. Визначення потенціалу припускає, що на нескінченності поле відсутнє і потенціал там можна покласти рівним нулю. Зазвичай за нуль потенціалу приймають потенціал Землі.

Потенціал і різниця потенціалів електростатичного поля вимірюють у вольтах. Різниця потенціалів між двома точками дорівнює одному вольта, якщо при переміщенні заряду в 1 кулон з першої точки в другу відбувається робота в 1 джоуль:

$$1\text{В} = 1\text{Дж}/1\text{Кл}.$$

Зв'язок потенціалу електростатичного поля з напруженістю.

Електростатичне поле в точці простору з координатами x, y, z можна характеризувати вектором напруженості поля $\vec{E}(x, y, z)$, що рівнозначне завданню трьох незалежних функцій – його компонент $E_x(x, y, z)$, $E_y(x, y, z)$ і $E_z(x, y, z)$. Умова потенційності електростатичного поля означає, що для характеристики поля досить задати лише одну скалярну функцію – потенціал поля $\varphi(x, y, z)$. Очевидно, між напруженістю і потенціалом існує зв'язок. Знайдемо її спочатку в одновимірному випадку, коли вектор напруженості поля $\vec{E}$ залежить тільки від однієї координати x і направлений вздовж вісі X. При перенесенні заряду q із точки 1 з координатою x в точку 2 з координатою $x + \Delta x$ (рис. 1.15) відбувається робота:

$$A(x) = F(x)\Delta x = qE(x)\Delta x$$

Цю роботу можна виразити через різність потенціалів в цих точках:

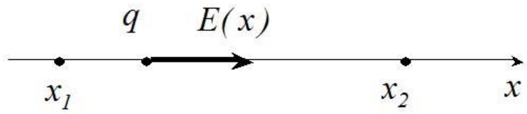


Рис.3

$$A(x) = q(\varphi_1 - \varphi_2) = -q\,\Delta\varphi$$

(знак "мінус", оскільки $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$). Тоді $qE(x)\Delta x = -q\,\Delta\varphi$, звідси, скорочуючи q і спрямовуючи Δx до нуля, отримаємо

$$E(x) = -\frac{d\varphi}{dx}.$$

В трьохвимірному випадку

$$\vec{E} = -grad\,\varphi,$$

де введений вектор

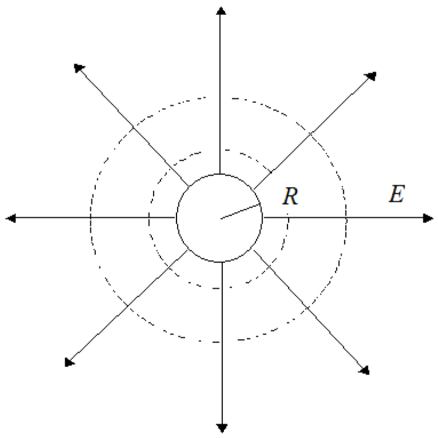
$$grad\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{\kappa},$$

званий градієнт скалярної функції. Компонентами його служать приватні похідні $\varphi(x, y, z)$ по координатам x, y, z. (При обчисленні, наприклад, приватної похідної функції $\varphi(x, y, z)$ по x дві інші змінні y і z вважаються постійними).

Таким чином, *напруженість електростатичного поля* $\vec{E}$ *рівна градієнту потенціалу* φ*, взятому зі зворотнім знаком.*

Обчислення потенціалу по напруженості

Знайдемо потенціал поля, створеного проводять кулею радіуса R, рівномірно зарядженим по поверхні. Напруженість поля кулі за його межами $(r \geq R)$ дорівнює



$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}.$$

Оскільки поле має сферичну симетрію, формула приймає вигляд

$$E(r) = -\frac{d\varphi(r)}{dr}, \text{ звідси}$$

$$\varphi(r) = -\int E(r)\,dr + C,$$

де $C-$ константа інтегрування. Вважаючи $\varphi(r \to \infty) = 0$, цу константу можна зробити рівною нулю. Тоді в результаті інтегрування отримаємо

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r}, \quad (r \geq R).$$

Еквіпотенціальні поверхні являють собою концентричні сфери, зображені на рис. пунктирними лініями. Оскільки напруженість поля всередині кулі дорівнює нулю $(E_{внутр} = 0)$,потенціал поля має там постійне значення $\varphi_{внутр} = const$. Умова безперервності потенціалу, яке випливає з його визначення дає

$$\varphi_{внутр} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R}.$$

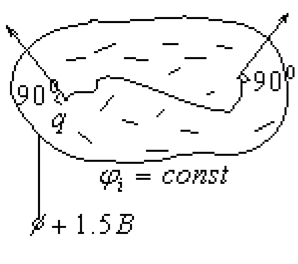
Принцип суперпозиції для потенціалу.

Якщо електричне поле створюється системою з декількох зарядів, то потенціал такої системи в кожній точці розраховується як алгебраїчна сума потенціалів від кожного розподілу зарядів

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i .$$

Еквіпотенціальні лінії поверхні і їх властивості

Лінії та поверхні, всі точки яких мають однаковий потенціал, називають еквіпотенціальними. Їх властивості ілюструються на малюнку.



1) $A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ - робота по переміщенню заряду уздовж еквіпотенціальної лінії (поверхні) дорівнює нулю, тобто $\varphi_1 = \varphi_2$.

2) $A = q\int_1^2 Edl\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0$ - силові лінії поля в кожній точці ортогональні до еквіпотенціальної лінії (поверхні). На малюнку проілюстровані властивості еквіпотенційних ліній і поверхонь.