Лекция № 3   Часть 1

Поток вектора напряженности электрического поля

Электрическое поле, заданное вектором напряженности $\vec{E}$, называется *векторным полем*. Пусть в этом поле находится малая площадка S (рис. 3).

На рис. 3 показаны линии напряженности $\vec{E}$,
n – нормаль к площадке dS и угол α .

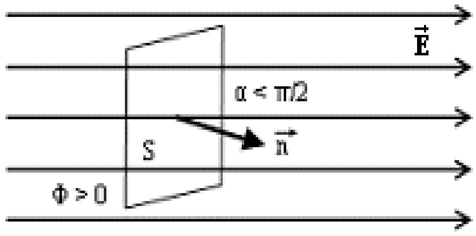


Рис.3

Потоком вектора напряженности электрического поля через элементарную площадку dS, называется произведение модуля вектора напряженности E на площадь элементарной поверхности и на косинус угла между нормалью к поверхности:

$$d\Phi_{\mathrm{E}} = E\,dS\,cos\,\alpha$$

Для произвольной поверхности S поток вектора E через эту поверхность равен

$$\Phi = \int_S \vec{E}\,d\vec{S} = \int_S E_n\,dS\,.$$

где интеграл берется по этой поверхности S.
Если поверхности S замкнутая, то поток вектора E через эту поверхность обозначается

$$\Phi = \oint_S \vec{E}\,d\vec{S}\,.$$

где кружок показывает, что поверхность S замкнутая.
E_n - проекция вектора E на нормаль к площадке dS

$$E_n = E\cos\alpha$$

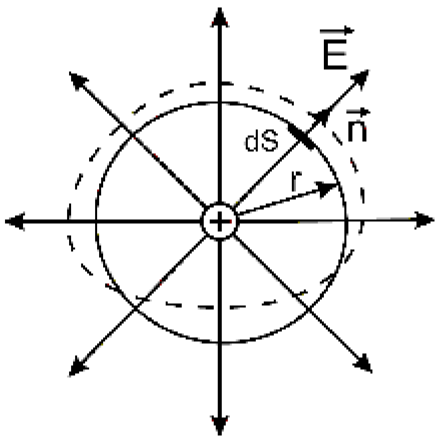
Нормаль к замкнутой поверхности выбирается внешняя, а поток может быть положительным или отрицательным. Подчеркнем, что поток пропорционален числу силовых линий, пронизывающих поверхность.

Теорема Остроградского–Гауса.

Теорема Остроградского–Гаусса – основная теорема электростатики. Она позволяет вычислить напряженность электрического поля в случаях, когда заряды, создающие поле, распределены в пространстве каким-либо симметричным образом.

Формулировка теоремы Гаусса: *поток вектора напряженности электрического поля через произвольную замкнутую поверхность равен алгебраической сумме зарядов, заключенных внутри этой поверхности, деленной на* ε_0:

$$\oint_S (\vec{E}\, d\vec{S}\,) = \frac{q_{внутр}}{\varepsilon_0}$$



Докажем теорему Гаусса.

Рассмотрим замкнутую поверхность в виде сферы радиуса r, в центр которой помещен точечный заряд q (рис.1). Напряженность электрического поля, созданного точечным зарядом в вакууме, вычисляется по формуле

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$$

Рис 1.

Для сферы $r=const$, следовательно, $E= const$, а также $E_n= E$, так как α=0. Поток вектора E в этом случае равен

$$\varPhi = \oint_S (\vec{E}\, d\vec{S}) = \oint \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\, dS = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\oint dS$$

Интеграл $\oint dS = 4\pi\, r^2$ - площадь сферы радиусом r.

$$\oint_S (\vec{E}\, d\vec{S}\,) = \oint_S E\, dS = E \oint_S dS = E \cdot 4\pi\, r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0},$$

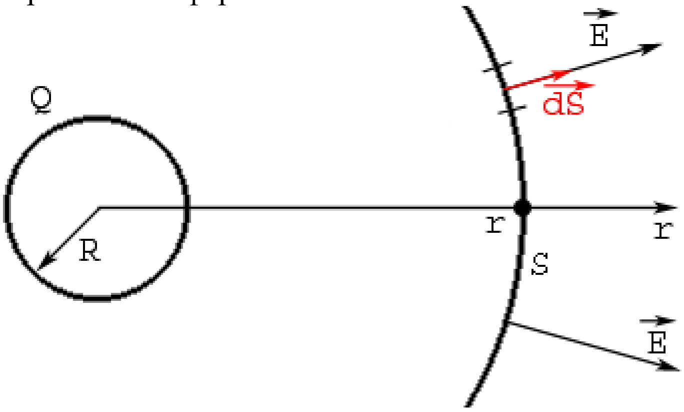
откуда

$$E(\,r\,) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}.$$

Если внутри замкнутой поверхности находится не один заряд, а несколько, то результирующая напряженность электрического поля находится по принципу суперпозиции. Тогда потоки и заряды складываются алгебраически.

Примеры:

1. Рассчитаем **поле заряженной сферы**. Пусть есть заряженная сфера радиуса R с положительным зарядом Q, найдем электростатическое поле этой сферы на некотором расстоянии r от её центра. Пусть $r > R$. Проведем сферу S радиуса r с центром в центре заряженной сферы.

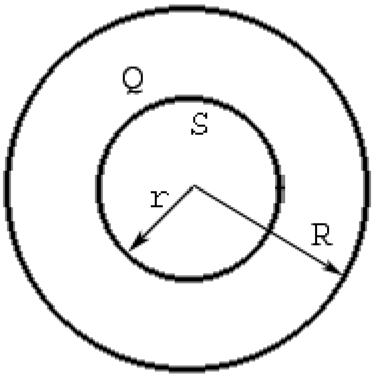


В силу симметричности задачи, очевидно, что поле создаваемое заряженной сферой на сфере радиуса r везде одинаково по модулю и направлено по радиусу. Тогда поток через эту сферу запишется так:

$$\Phi = \oint_S \left(\vec{E}d\vec{S}\right) = E\oint_S dS = E4\pi \cdot r^2 \overset{по\,Теор\,Гаусса}{=} \frac{Q}{\varepsilon_0}.$$

Откуда - $E = \dfrac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}$. Т.е. заряженная сфера создаёт вне себя такое же поле как и такой же точечный заряд находящийся в центре этой сферы

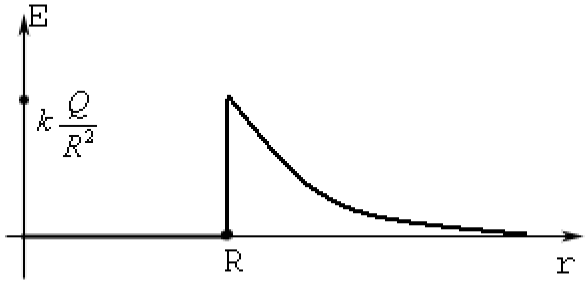
Пусть $r < R$.



Тогда поток через эту сферу запишется так:

$$\varPhi = \oint\limits_S \left(\vec{E} d\vec{S}\right) = E \oint\limits_S dS = E 4\pi \cdot r^2 \overset{\text{по Теор Гаусса}}{=} 0 .$$

Откуда - $\vec{E} = \vec{0}$. Т.е. поля внутри заряженной сферы нет.



2. Электрическое **поле заряженного шара.**
   По объему шара R однородно распределен заряд q. Пренебрегая влиянием вещества шара, определите напряженность электрического поля в произвольной точке пространства вне шара и внутри него. Полученный результат представьте на графике $E_r(r)$, где E_r проекция вектора напряженности на ось r, проведенную из центра шара.

Решение.

Поле такой системы зарядов центрально-симметричное, поэтому в качестве гауссовой замкнутой поверхности следует взять концентрическую сферу радиуса r.

1) Найдем напряженность электрического поля внутри шара $0 \le r \le R$. Векторы напряженности $\vec{E}$ направлены по радиусам выбранной сферы, а модули векторов $\vec{E}$ зависят только от расстояния r до центра сферы, то есть, одинаковы по поверхности сферы. Поэтому поток поля вектора $\vec{E}$ через выбранную сферу S_1 можно записать $ES_1 = E 4\pi r^2$ (Рис.2а).

Заряд, охватываемый сферой S_1, равен $q_1 = \rho \frac{4}{3} \pi r^3$, где $\rho = \frac{q}{4/3 \cdot \pi R^3}$ - объемная плотность заряда. Согласно теореме Гаусса $E 4\pi r^2 = \frac{q}{\varepsilon_0 R^3} r^3$. В результате напряженность поля внутри однородно заряженного шара равна:

$$E = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^3} r \ ,$$

т.е. поле E внутри шара возрастает по линейному закону от нуля в центре до значения $E=\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 R^2}$ на его поверхности.

2) Найдем напряженность электрического поля вне шара $r>R$. Свойство симметрии поля остается неизменным. Поэтому гауссову поверхность представим концентрической сферой S_2 радиуса $r>R$ (Рис.2а). Согласно теореме Гаусса имеем: $E4\pi r^2=\dfrac{q}{\varepsilon_0}$, где q заряд шара. Для величины напряженности поля получим:

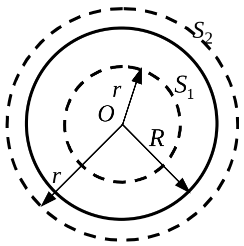
$$E=\frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}.$$

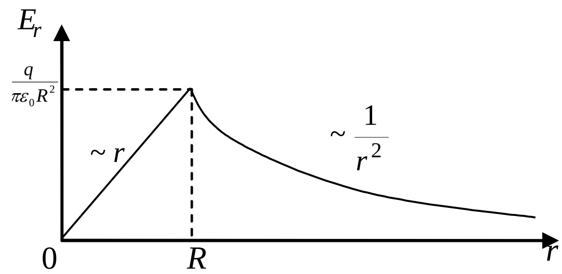
Поле E вне однородно заряженного шара убывает обратно пропорционально r^2.

Объединяя полученные зависимости, запишем:

$$E(r)=\begin{cases}\dfrac{qr}{4\pi\varepsilon_0 R^3}, если\, 0\le r\le R\\[2ex] \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2}, если\, r>R\end{cases}.$$

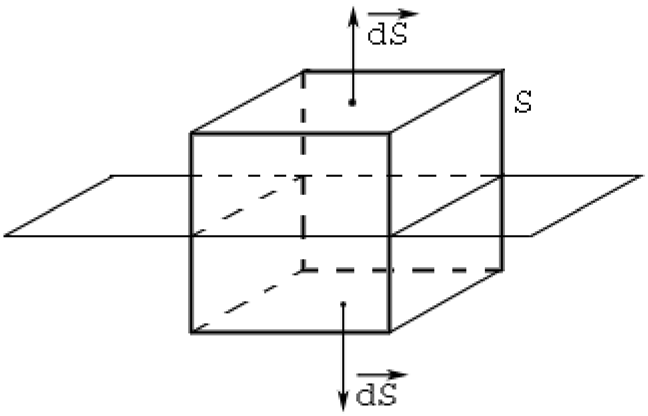
График зависимости проекции вектора напряженности E_r на ось r, проведенную из центра шара, представлен на Рис. 2б.





3. Рассмотрим поле бесконечной, однородной, тонкой, **заряженной плоскости**. Выберем площадку ΔS с зарядом Δq. $\lim\limits_{\Delta S\to 0}\dfrac{\Delta q}{\Delta S}=\dfrac{dq}{dS}=\sigma$ - поверхностная плотность заряда. $\sigma=\sigma(\vec{r})$ - общий случай. Если $\sigma=const$ то плоскость однородно заряженная. Рассмотрим однородно заряженную плоскость, с плотностью заряда σ. Выберем на ней некоторое $d\vec{S}$, малое настолько, что $E_{d\vec{S}}$ можно считать постоянным. Рассмотрим параллелепипед S, такой, что его верхние

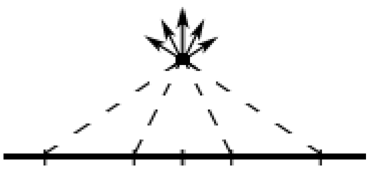
грани параллельны заряженной плоскости и по площади равны dS, а боковые грани разделены заряженной плоскостью пополам (ребро боковой грани 2h).



Тогда поток через этот параллелепипед равен

$$d\Phi = d\Phi_{вер} + d\Phi_{ниж} + d\Phi_{бок}.$$

Рассмотрим некоторую точку не лежащую на данной плоскости. Опустим из неё перпендикуляр на данную плоскость и от полученной точки отсчитаем в разные стороны симметричные полоски одинаковой длины, малые настолько, что создаваемое ими поле можно считать одинаковым.



Просуммируем попарно напряженности от всех полосок. Из элементарной геометрии очевидно, что $\vec{E}_{сумм}$ располагается по нормали к плоскости. Тогда $d\Phi_{бок}$=0, т.к. вектор площади боковой поверхности перпендикулярен напряженности. Но очевидно, что $d\Phi_{вер} = d\Phi_{ниж}$. Откуда

$$d\Phi = 2d\Phi_{вер} = 2E(h)dS \overset{по\_теор\_Гаусса}{=} \frac{\sigma \cdot dS}{\varepsilon_0}.$$

$$E = \frac{\sigma}{2\varepsilon_0}.$$

Т.о. поле зависит только от σ и по модулю одинаково в каждой точке.