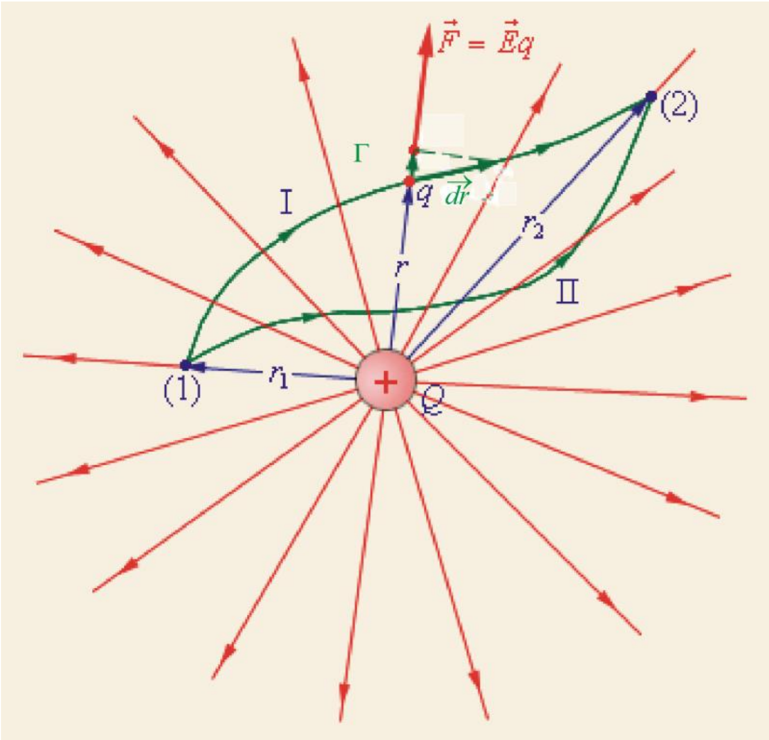
Лекция 3. Часть2.
Потенциал электростатического поля.
(Пионером в этой области считается Лагранж, который
в 1777 году впервые ввел понятие потенциала для гравитационного поля).

Работа сил электростатического поля по переносу точечного заряда.



Пробный (положительный и очень маленький по размеру – это определение пробного заряда) заряд q медленно (квазистатически – заряд находится почти в покое) перемещаем по пути Г из 1 в 2 в электростатическом поле точечного статического заряда Q. Найдем элементарную работу сил электростатического поля этого заряда по перемещению заряда q:
Как известно из курса механики
Элементарная работа силы $\vec{F}$: $dA=\left(\vec{F},d\vec{r}\right)$ где $d\vec{r}$ – элементарное перемещение точки приложения силы $\vec{F}$.

$$dA=\left(\vec{F},d\vec{r}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Qq}{r^3}\left(\vec{r},d\vec{r}\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Qq}{r^3}r\cdot dr=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Qq}{r^2}dr,$$

т.к. $\left(\vec{r},\vec{r}\right)=r^2$, тогда $\left(d\vec{r},\vec{r}\right)+\left(\vec{r},d\vec{r}\right)=2rdr$ или $2\left(\vec{r},d\vec{r}\right)=2rdr;$ $\left(\vec{r},d\vec{r}\right)=rdr$.

Итак, работа сил электростатического поля по перемещению точечного заряда из положения 1 в положение 2 по контуру Г может быть вычислена по формуле:

$$A_{\Gamma}\left(1\to 2\right)=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Qq\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{r^2}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Qq\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)$$

$$\boxed{A_{\Gamma(1\to 2)}=\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}Qq\left(\frac{1}{r_1}-\frac{1}{r_2}\right)}$$

В этой формуле не содержится сведений о форме траектории заряда q, а фигурируют только координаты начала и конца траектории r_1 и r_2, откуда и следует, что кулоновская сила – консервативная. Поле любой консервативной силы, как известно, является *потенциальным*.

Перенесем заряд q в поле кулоновских сил из точки *1* в точку *2* по пути *1a2* (рис.2). Совершаемая при этом работа равна A_{1a2}. Вернем заряд в точку *1* по другой траектории *2b1*. Работа составит величину A_{2b1}. Поскольку работа не зависит от формы траектории, то $A_{1a2} = A_{1b2} = -A_{2b1}$. Поэтому сумма $A_{1a2} + A_{2b1} = 0$, т.е. работа переноса заряда по замкнутой траектории равна нулю.

Эту работу можно представить в виде интеграла по замкнутому контуру (обозначается кружочком на знаке интеграла)

$$\oint_L (\vec{F}\, d\vec{r}\,) = q \oint_L (\vec{E}\, d\vec{r}\,) = 0.$$

Интеграл по замкнутому контуру L *от скалярного произведения* $(\vec{E}\, d\vec{r}\,)$ *называется циркуляцией вектора* $\vec{E}$ *по этому контуру.*

Равенство нулю циркуляции вектора $\vec{E}$ выражает условие потенциальности электростатического поля:

$$\oint_L (\vec{E}\, d\vec{l}\,) = 0.$$

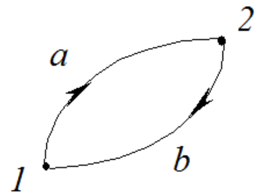


Рис.2

Уравнение является математическим выражением потенциальности электростатического поля.

Поэтому в электростатическом поле можно ввести понятие потенциальной энергии заряда. Однако, в отличие от механики, в электростатике вводится понятие *потенциала поля*, под которым понимается потенциальная энергия положительного заряда в один кулон.

Потенциал электростатического поля

Пусть заряд q переносится в электростатическом поле из точки поля *1* в точку *2*. *Разностью потенциалов* $\varphi_1 - \varphi_2$ *между двумя точками электростатического поля называется работа, совершаемая силами поля при перемещении единичного положительного заряда по любому пути из первой точки во вторую*:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q}.$$

Подставив сюда, получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q} = kQ\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = k\frac{Q}{r_1} - k\frac{Q}{r_2},$$

т.е. *потенциал поля точечного заряда* Q на расстоянии r от него:

$$\varphi = k\frac{Q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\cdot\frac{Q}{r}.$$

Удалим теперь точку 2 на бесконечность, где поле отсутствует, и

$$\varphi_1 - \varphi_\infty = \frac{A_{1\infty}}{q}.$$

Положим потенциал поля на бесконечности равным нулю:

$$\varphi_\infty = \lim_{r \to \infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = 0.$$

Тогда можно дать определение потенциала поля: *потенциалом электростатического поля в данной точке называется работа, совершаемая силами поля при удалении единичного положительного заряда по любому пути из данной точки на бесконечность*:

$$\varphi = \frac{A}{q}.$$

Потенциал поля является функцией координат и определяется не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной. Определение потенциала предполагает, что на бесконечности поле отсутствует и потенциал там можно положить равным нулю. Обычно за нуль потенциала принимают потенциал Земли.

Потенциал и разность потенциалов электростатического поля измеряют в *вольтах*. *Разность потенциалов между двумя точками равна одному вольту, если при перемещении заряда в 1 кулон из первой точки во вторую совершается работа в 1 джоуль:*

$$1\text{В} = 1\text{Дж}/1\text{Кл}.$$

Связь потенциала электростатического поля с напряженностью.

Электростатическое поле в точке пространства с координатами x, y, z можно характеризовать вектором напряженности поля $\vec{E}(x, y, z)$, что равнозначно заданию трех независимых функций – его компонент $E_x(x, y, z)$, $E_y(x, y, z)$ и $E_z(x, y, z)$. Условие потенциальности электростатического поля означает, что для характеристики поля достаточно задать всего одну скалярную функцию – потенциал поля $\varphi(x, y, z)$. Очевидно, между напряженностью и потенциалом существует связь. Найдем ее сначала в одномерном случае, когда вектор напряженности поля $\vec{E}$ зависит только от одной координаты x и направлен вдоль оси X. При переносе заряда q из точки 1 с координатой x в точку 2 с координатой $x + \Delta x$ (рис.3) совершается работа:

$$A(x) = F(x)\Delta x = qE(x)\Delta x.$$

Эту работу можно выразить через разность потенциалов в этих точках:

$$A(x) = q(\varphi_1 - \varphi_2) = -q\,\Delta\varphi$$

(знак “минус”, поскольку $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$). Тогда $qE(x)\,\Delta x = -q\,\Delta\varphi$, откуда, сокращая q и устремляя Δx к нулю, получим

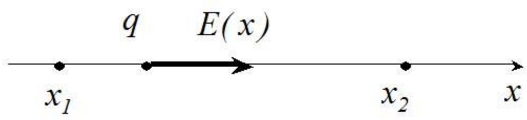


Рис.3

$$E(x) = -\frac{d\varphi}{dx}.$$

В трехмерном случае

$$\vec{E} = -grad\,\varphi,$$

где введен вектор

$$grad\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{\kappa},$$

называемый *градиентом* скалярной функции. Компонентами его служат частные производные $\varphi(x, y, z)$ по координатам $x,\ y,\ z$. (При вычислении, например, частной производной функции $\varphi(x, y, z)$ по x две другие переменные y и z считаются постоянными).

Таким образом, *напряженность электростатического поля $\vec{E}$ равна градиенту потенциала φ, взятому с обратным знаком.*

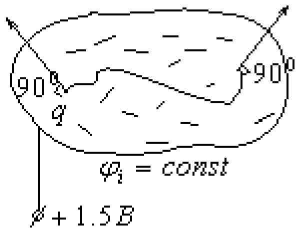
Принцип суперпозиции для потенциала.

Если электрическое поле создается системой из нескольких зарядов, то потенциал такой системы в каждой точке рассчитывается как алгебраическая сумма потенциалов от каждого распределения зарядов

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i \ .$$

Эквипотенциальные линии и поверхности и их свойства.

Линии и поверхности, все точки которых имеют *одинаковый потенциал*, называют ***эквипотенциальными***. Их свойства иллюстрируются на рисунке.



1) $A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ - работа по перемещению заряда вдоль эквипотенциальной линии (поверхности) равна нулю, т. к. $\varphi_1 = \varphi_2$.

2) $A = q\int_1^2 Edl\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0$ - силовые линии поля в каждой точке ортогональны к эквипотенциальной линии (поверхности). На рисунке проиллюстрированы свойства эквипотенциальных линий и поверхностей.