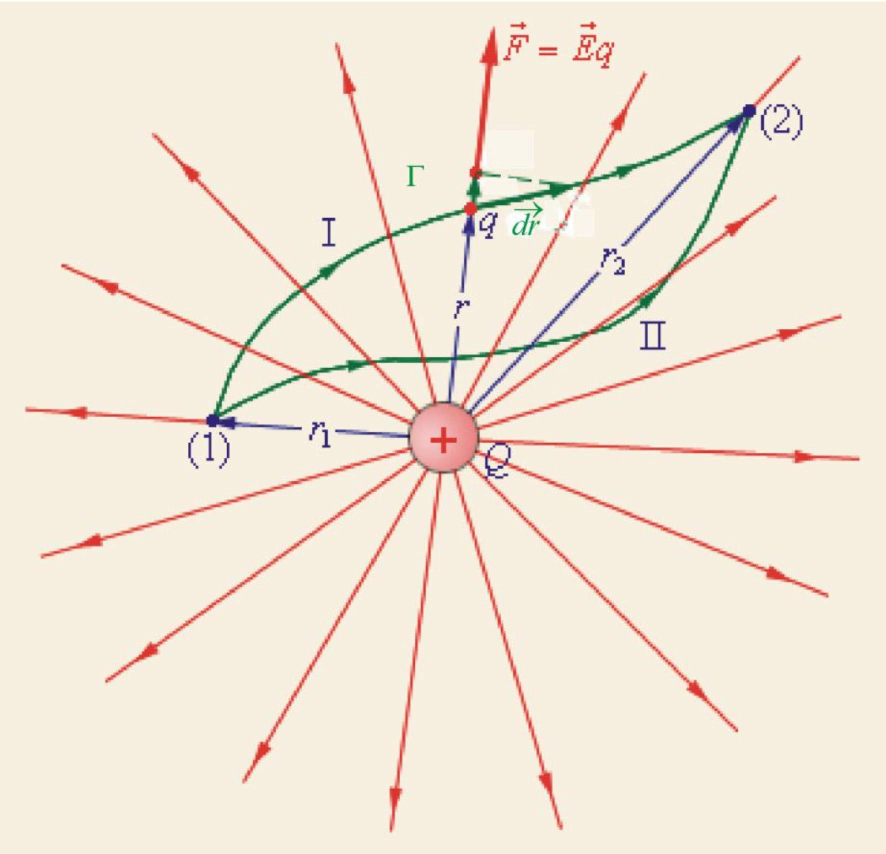
Лекция 3.
Потенциал электростатического поля.
(«Пионером» в этой области считается Лагранж, который
в 1777 году впервые ввел понятие потенциала для гравитационного поля).

Работа сил электростатического поля по переносу точечного заряда.



Пробный (положительный и очень маленький по размеру – это определение пробного заряда) заряд q <u>медленно</u> (квазистатически – заряд находится почти в покое) перемещаем по пути Г («гамма-большое») из 1 в 2 в электростатическом поле точечного статического заряда Q. Найдем элементарную работу сил электростатического поля этого заряда по перемещению заряда q:

Как известно из курса механики

Элементарная работа силы $\vec{F}$: $dA = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right)$ где $d\vec{r}$ – элементарное перемещение точки приложения силы $\vec{F}$.

$$dA = \left(\vec{F}, d\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r^3}\left(\vec{r}, d\vec{r}\right) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r^3} r \cdot dr = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Qq}{r^2} dr,$$

т.к. $\left(\vec{r}, \vec{r}\right) = r^2$, тогда $\left(d\vec{r}, \vec{r}\right) + \left(\vec{r}, d\vec{r}\right) = 2rdr$ или $2\left(\vec{r}, d\vec{r}\right) = 2rdr$; $\left(\vec{r}, d\vec{r}\right) = rdr$.

Итак, работа сил электростатического поля по перемещению точечного заряда из положения 1 в положение 2 по контуру Г может быть вычислена по формуле:

$$A_Г(1 \to 2) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Qq \int_{r_1}^{r_2} \frac{dr}{r^2} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Qq \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)$$

$$\boxed{A_{Г(1\to2)} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} Qq \left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right)}$$

В этой формуле не содержится сведений о форме траектории заряда q, а фигурируют только координаты начала и конца траектории r_1 и r_2, откуда и следует, что кулоновская сила – консервативная. Поле любой консервативной силы, как известно, является *потенциальным*.

Перенесем заряд q в поле кулоновских сил из точки *1* в точку *2* по пути *1a2* (рис.2). Совершаемая при этом работа равна A_{1a2}. Вернем заряд в точку *1* по другой траектории *2b1*. Работа составит величину A_{2b1}. Поскольку работа не зависит от формы траектории, то $A_{1a2} = A_{1b2} = - A_{2b1}$. Поэтому сумма $A_{1a2} + A_{2b1} = 0$, т.е. работа переноса заряда по замкнутой траектории равна нулю.

Эту работу можно представить в виде интеграла по замкнутому контуру (обозначается кружочком на знаке интеграла)

$$\oint_L (\vec{F}\, d\vec{r}\,) = q \oint_L (\vec{E}\, d\vec{r}\,) = 0.$$

Интеграл по замкнутому контуру L от скалярного произведения $(\vec{E}\, d\vec{r}\,)$ называется циркуляцией вектора $\vec{E}$ по этому контуру.

Равенство нулю циркуляции вектора $\vec{E}$ выражает условие потенциальности электростатического поля:

$$\oint_L (\vec{E}\, d\vec{l}\,) = 0.$$

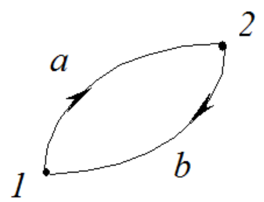


Рис.2

Уравнение является математическим выражением потенциальности электростатического поля.

Поэтому в электростатическом поле можно ввести понятие потенциальной энергии заряда. Однако, в отличие от механики, в электростатике вводится понятие *потенциала поля*, под которым понимается потенциальная энергия положительного заряда в один кулон.

Локальный (дифференциальный) признак потенциальности электростатического поля.

Запишем без доказательства данный признак в виде

$$\boxed{\frac{\partial E_y}{\partial x} = \frac{\partial E_x}{\partial y};\; \frac{\partial E_z}{\partial y} = \frac{\partial E_y}{\partial z};\; \frac{\partial E_x}{\partial z} = \frac{\partial E_z}{\partial x}}.$$

Символически данное выражение записывают в виде

$$\operatorname{rot} \vec{E} = 0,$$

где ротор вектора $\vec{E}$ определяется следующим образом

$$\operatorname{rot} \vec{E} = \left(\frac{\partial E_z}{\partial y} - \frac{\partial E_y}{\partial z} \right) \vec{i} + \left(\frac{\partial E_x}{\partial z} - \frac{\partial E_z}{\partial x} \right) \vec{j} + \left(\frac{\partial E_y}{\partial x} - \frac{\partial E_x}{\partial y} \right) \vec{k}.$$

То, что выписано – необходимый, а в электростатике – и достаточный признак потенциальности электрического поля в декартовой системе координат. Выполнение этих равенств проверить на практике гораздо проще, чем проверять интегральный признак потенциальности электростатического поля.

Потенциал электростатического поля

Пусть заряд q переносится в электростатическом поле из точки поля 1 в точку 2. *Разностью потенциалов* $\varphi_1 - \varphi_2$ *между двумя точками электростатического поля называется работа, совершаемая силами поля при перемещении единичного положительного заряда по любому пути из первой точки во вторую*:

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q}.$$

Подставив сюда, получим

$$\varphi_1 - \varphi_2 = \frac{A_{12}}{q} = kQ\left(\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2}\right) = k\frac{Q}{r_1} - k\frac{Q}{r_2},$$

т.е. *потенциал поля точечного заряда* Q на расстоянии r от него:

$$\varphi = k\frac{Q}{r} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{r}.$$

Удалим теперь точку 2 на бесконечность, где поле отсутствует, и

$$\varphi_1 - \varphi_\infty = \frac{A_{1\infty}}{q}.$$

Положим потенциал поля на бесконечности равным нулю:

$$\varphi_\infty = \lim_{r\to\infty} \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r} = 0.$$

Тогда можно дать определение потенциала поля: *потенциалом электростатического поля в данной точке называется работа, совершаемая силами поля при удалении единичного положительного заряда по любому пути из данной точки на бесконечность*:

$$\varphi = \frac{A}{q}.$$

Потенциал поля является функцией координат и определяется не однозначно, а с точностью до произвольной постоянной. Определение потенциала предполагает, что на бесконечности поле отсутствует и потенциал там можно положить равным нулю. Обычно за нуль потенциала принимают потенциал Земли.

Потенциал и разность потенциалов электростатического поля измеряют в *вольтах*. *Разность потенциалов между двумя точками равна одному вольту, если при перемещении заряда в 1 кулон из первой точки во вторую совершается работа в 1 джоуль:*

$$1\text{В} = 1\text{Дж}/1\text{Кл}.$$

Связь потенциала электростатического поля с напряженностью. Эквипотенциальные поверхности

Электростатическое поле в точке пространства с координатами x, y, z можно характеризовать вектором напряженности поля $\vec{E}(x, y, z)$, что равнозначно заданию трех независимых функций – его компонент $E_x(x, y, z)$, $E_y(x, y, z)$ и $E_z(x, y, z)$. Условие потенциальности электростатического поля означает, что для характеристики поля достаточно задать всего одну скалярную функцию – потенциал поля $\varphi(x, y, z)$. Очевидно, между напряженностью и потенциалом существует связь. Найдем ее сначала в одномерном случае, когда вектор напряженности поля $\vec{E}$ зависит только от одной координаты x и направлен вдоль оси X. При переносе заряда q из точки *1* с координатой x в точку *2* с координатой $x + \Delta x$ (рис. 1.15) совершается работа:

$$A(x) = F(x)\Delta x = qE(x)\Delta x.$$

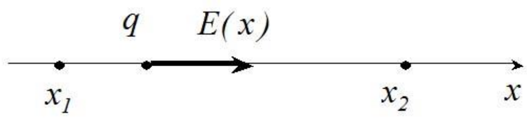


Рис.3

Эту работу можно выразить через разность потенциалов в этих точках:

$$A(x) = q(\varphi_1 - \varphi_2) = -q\,\Delta\varphi$$

(знак “минус”, поскольку $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$). Тогда $qE(x)\,\Delta x = -q\,\Delta\varphi$, откуда, сокращая q и устремляя Δx к нулю, получим

$$E(x) = -\frac{d\varphi}{dx}.$$

В трехмерном случае

$$\vec{E} = -grad\,\varphi,$$

где введен вектор

$$grad\,\varphi = \frac{\partial\varphi}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial\varphi}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial\varphi}{\partial z}\vec{\kappa},$$

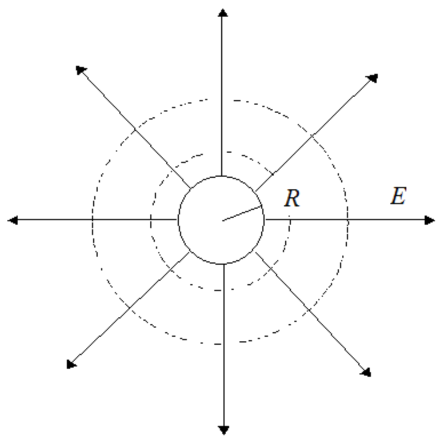
называемый *градиентом* скалярной функции. Компонентами его служат частные производные $\varphi(x, y, z)$ по координатам x, y, z. (При вычислении, например, частной производной функции $\varphi(x, y, z)$ по x две другие переменные y и z считаются постоянными).

Таким образом, *напряженность электростатического поля $\vec{E}$ равна градиенту потенциала φ, взятому с обратным знаком.*

Вычисление потенциала по напряженности

Найдем потенциал поля, созданного проводящим ш а р о м радиуса R, равномерно заряженным п о п о в е р х н о с т и (рис.). Напряженность поля шара за его пределами ($r \geq R$) равна

$$E(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r^2}.$$



Поскольку поле имеет сферическую симметрию, формула принимает вид $E(r) = -\frac{d\varphi(r)}{dr}$, откуда

$$\varphi(r) = -\int E(r)\,dr + C,$$

где $C -$ константа интегрирования. Полагая $\varphi(r \to \infty) = 0$, эту константу можно сделать равной нулю. Тогда в результате интегрирования получим

$$\varphi(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{r}, \quad (r \geq R).$$

Эквипотенциальные поверхности представляют собой концентрические сферы, изображенные на рис. пунктирными линиями. Поскольку напряженность поля внутри шара равна нулю ($E_{внутр} = 0$), потенциал поля имеет там постоянное значение $\varphi_{внутр} = const$. Условие непрерывности потенциала, которое следует из его определения дает

$$\varphi_{внутр} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{R}.$$

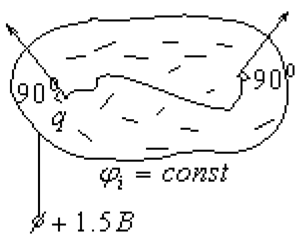
Принцип суперпозиции для потенциала.

Если электрическое поле создается системой из нескольких зарядов, то потенциал такой системы в каждой точке рассчитывается как алгебраическая сумма потенциалов от каждого распределения зарядов

$$\varphi = \sum_{i=1}^{N} \varphi_i \,.$$

Эквипотенциальные линии и поверхности и их свойства.

Линии и поверхности, все точки которых имеют *одинаковый потенциал*, называют ***эквипотенциальными***. Их свойства иллюстрируются на рисунке.



1) $A = q(\varphi_1 - \varphi_2) = 0$ - работа по перемещению заряда вдоль эквипотенциальной линии (поверхности) равна нулю, т. к. $\varphi_1 = \varphi_2$.

2) $A = q\int_1^2 Edl\cos\alpha = 0 \Rightarrow \cos\alpha = 0$ - силовые линии поля в каждой точке ортогональны к эквипотенциальной линии (поверхности). На рисунке проиллюстрированы свойства эквипотенциальных линий и поверхностей.