Лекція №3

Теорема про циркуляцію вектора магнітної індукції у вакуумі

Теорема про циркуляцію вектора магнітної індукції дозволяє обчислювати індукцію магнітного поля, створеного сукупністю струмів, що течуть по проводах.

Циркуляцією C вектора $\vec{B}$ по замкнутому контуру L називаєтся інтеграл по цьому контуру від скалярного добутку $\vec{B}$ на елемент контуру $d\vec{l}$

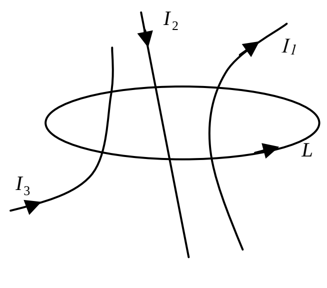
$$C = \oint_L \vec{B}\,d\vec{l}\ .$$

Інтегрування по контуру припускає, що значення підінтегральної функції беруться в точках цього контуру. Коло на значку інтеграла означає, що контур L замкнутий.

Формулювання теореми: *циркуляція вектора магнітної індукції по довільному замкненому контуру дорівнює алгебраїчній сумі струмів, охоплених цим контуром, помноженої на* μ_o *:*

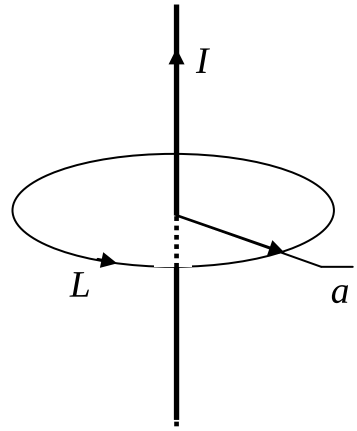
$$\oint_L \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_o \sum_{k=1}^{N} I_k\ .$$

Позитивними вважаються струми, напрямок яких пов'язане з напрямком обходу контуру правилом правого гвинта (струми I_1 і I_3 на Мал.1), негативними – струми, що течуть у зворотному напрямку.



Визначення магнітного поля нескінченного прямого струму за допомогою теореми и циркуляції

Знайдемо за допомогою теореми про циркуляцію магнітне поле, створене нескінченним прямим провідником із струмом (Мал.3). В якості контуру інтегрування L візьмемо одну з ліній магнітної індукції $\vec{B}$, представляє собою окружність радіуса a. Оскільки елемент контуру $d\vec{l}$ в кожній його точці має той же напрямок, що і вектор $\vec{B}$, косинус кута між ними дорівнює одиниці і скалярний добуток векторів $\vec{B}d\vec{l}$ перетворюється в добуток їхніх модулів: $\vec{B}d\vec{l} = Bdl$. Крім того, модуль вектора має постійне значення в усіх точках контуру, оскільки всі вони рівновіддалені від провідника. Тоді, ліва частина теореми про циркуляцію дає:



$$\oint_L \vec{B}\,d\vec{l} = \oint_L B\,dl = B\oint_L dl = 2\pi a \cdot B \ ,$$

де $2\pi a$ - довжина кола.

Для правої частини отримуємо:

$$\mu_o \sum_{k=1}^{N} I_k = \mu_o I \, ,$$

так як струм один.

Звідки

$$B = \frac{\mu_o I}{2\pi a},$$

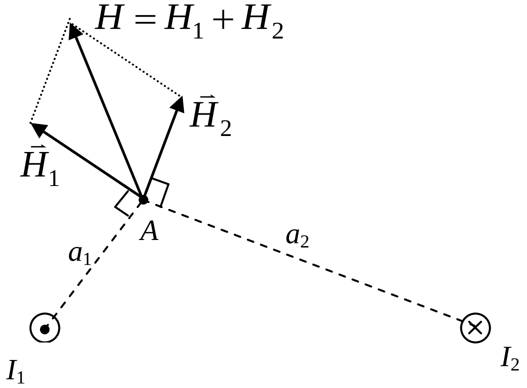
що збігається з отриманим раніше виразом (див. попередню лекцію).

Нагадаємо, що напрямок магнітної індукції або напруженості магнітного поля визначається за правилом правого гвинта:

1) поєднуємо поступальний рух правого гвинта з напрямком струму,

2) тоді, обертальний рух гвинта покаже напрям силових ліній магнітного поля.

Зокрема зобразимо напруженість магнітного поля в точці А від двох нескінченних прямих струмів спрямованих перпендикулярно до площини листа до «нас» - струм I_1 і від «нас» - струм I_2.



Магнітне поле соленоїда

Соленоїдом *називається система кругових струмів, центри яких лежать на одній осі, яка називається віссю соленоїда.*

Простіше кажучи, це циліндрична катушка, що складається з намотаних впритул один до одного (виток до витка) провідників.

Розглянемо довгий соленоїд, осьовий переріз якого показано на рис.4 (кружечки позначають перетин дроту, намотаного на котушку*)*.

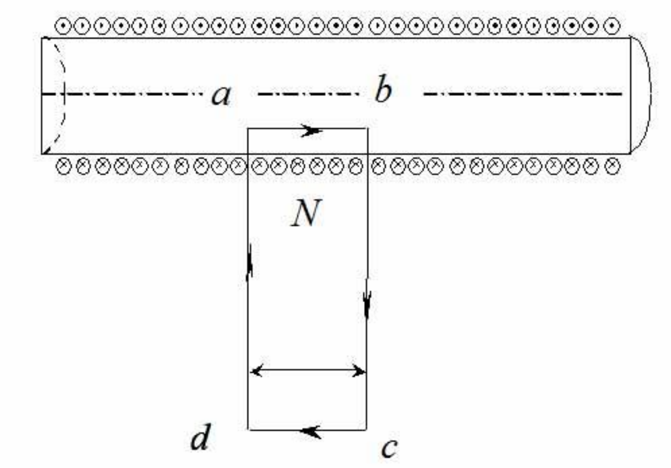


Рис.4

Щоб застосувати теорему про циркуляцію, контур інтегрування L виберемо у вигляді прямокутника $abcd$, розташованого в площині осьового перерізу, у якого боку ab і cd довжиной l паралельні осі соленоїда, а bc і ad – перпендикулярні їй. Напрямок обходу контуру вказано стрілками. Контур охоплює N витків дроту, в яких струм I спрямований за площину креслення (від «нас»), тобто має позитивний знак.

Згідно з теоремою про циркуляції

$$\oint_L \vec{B}\,d\vec{l} = \mu_o NI$$

Інтеграл по замкнутому контуру L можна представити у вигляді суми інтегралів по кожній із його сторін:

$$\oint_L \vec{B}\,d\vec{l} = \int_a^b \vec{B}\,d\vec{l} + \int_b^c \vec{B}\,d\vec{l} + \int_c^d \vec{B}\,d\vec{l} + \int_d^a \vec{B}\,d\vec{l}\,.$$

У першому з них вектори $\vec{B}$ і $d\vec{l}$ збігаються за напрямом і тому $\vec{B}\,d\vec{l} = B\,dl$. Крім того, в силу паралельності боку ab осі соленоїда, модуль $\vec{B}$ має на ній постійне значення. Тоді

$$\int_a^b \vec{B}\,d\vec{l} = \int_a^b B\,dl = B\int_a^b dl = B \cdot l\,.$$

Інтеграли по сторонах контуру bc і da звертаються в нуль, оскільки вектори $\vec{B}$ і $d\vec{l}$ на них перпендикулярні один одному і скалярний добуток $\vec{B}\,d\vec{l} = 0$. Четвертий інтеграл – по лінії cd – можна покласти рівним нулю, так як. далеко від довгого соленоїда індукція поля дуже мала.

Остаточно одержимо

$$\oint_L \vec{B}d\vec{l} = B \cdot l = \mu_o NI ,$$

звідти

$$B = \mu_o nI ,$$

де $n = N / l$ число витків соленоїда, що припадає на одиницю його довжини (щільність намотування).

Зауважимо, що щільність намотування визначається тільки діаметром дроту. Так як довжина соленоїда визначається кількістю витків $l = N \cdot d$, то для щільності намотування маємо:

$$n = N / l = N / (N \cdot d) = 1/d ,$$

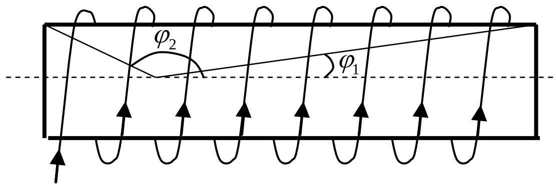
де d - діаметр провода.

Очевидно, що щільність намотування вимірюється в зворотних метрів $[n] = 1/\text{м}$.

З отриманої формули випливає, що всередині довгого соленоїда далеко від його кінців магнітне поле однорідне. Індукція поля B пропорційна лінійної щільності числа витків соленоїда і силі струму в його обмотці.

Зауважимо, що отримана формула справедлива для тонкого довгого соленоїда. Іноді кажуть для нескінченно довгого соленоїда або ідеального соленоїда.

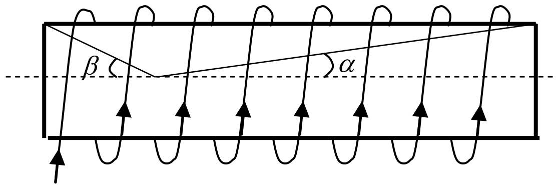
Магнітне поле соленоїда кінцевої довжини можна знайти із закону Біо-Савара-Лапласа. Напруженість магнітного поля на осі такого соленоїда визначається виразом



$$H = \frac{nI}{2}\left(\cos\varphi_1 - \cos\varphi_2\right),$$

де φ_1 і φ_2 - кути, під якими видно торці соленоїда (рис.).

Або



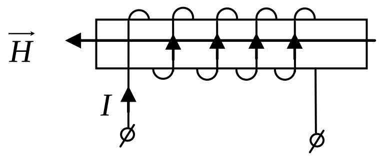
$$H = \frac{nI}{2}\left(\cos\alpha + \cos\beta\right).$$

Згідно з цими виразами напруженість магнітного поля має максимальне значення у центрі соленоїда, а у його торців зменшується. Якщо спрямувати довжину соленоїда до нескінченності, то $\varphi_1 \to 0$, а $\varphi_2 \to 180^\circ$ (або $\alpha \to 0, \beta \to 0$), що приводить до виразу

$$H = \frac{nI}{2}\left(\cos 0 + \cos 0\right) = \frac{nI}{2}\left(1+1\right) = nI ,$$

що збігається з раніше отриманою формулою.

Напрям напруженості магнітного поля визначають за правилом правого гвинта:



1) правий гвинт обертають по напрямку струму,

2) поступальний рух гвинта вкаже напрям напруженості магнітного поля магнітної індукції).

Магнітне поле тороїда

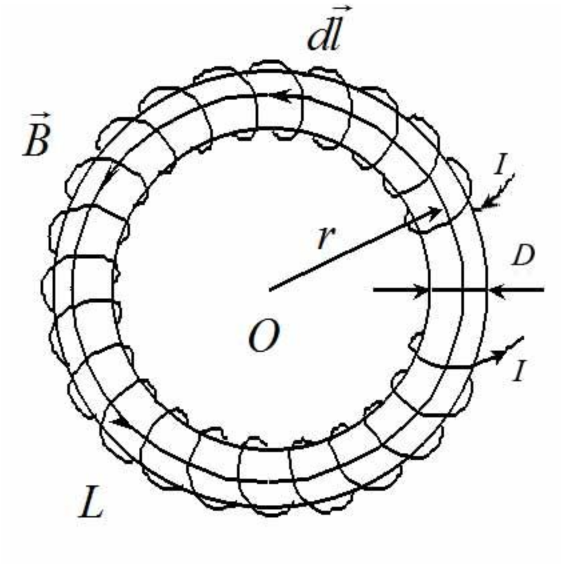


Рис.

Звернемося тепер до тороїда, зображеному на рис, який являє собою соленоїд, зігнутий у кільце (геометрична фігура – тор). Лінії індукції магнітного поля є концентричними колами з центрами на осі симетрії тороїда, що проходить через точку O перпендикулярно площині креслення. Одну з цих кіл – радіусом r – візьмемо в якості контуру інтегрування L. Вектори $\vec{B}$ і $\vec{dl}$ в кожній точці цієї окружності паралельні один одному, тому $\vec{B}\vec{dl} = B\,dl$. Крім того що, модуль $\vec{B}$ на цій окружності має постійне значення. З урахуванням сказаного вираз для циркуляції прийме вигляд:

$$\oint_L \vec{B}\,\vec{dl} = \oint_L B\,dl = B\oint_L dl = 2\pi r \cdot B.$$

Права частина теореми про циркуляцію перетворюється:

$$\mu_o \sum_{k=1}^{N} I_k = \mu_o \sum_{k=1}^{N} I = \mu_o I \sum_{k=1}^{N} 1 = \mu_o IN,$$

так як кожен струм I_k дорівнює одному і тому ж струмі I, а N – число витків тороїда. Звідси

$$B(r) = \frac{\mu_o NI}{2\pi r}.$$

З цієї формули випливає, що індукція магнітного поля тороїда убуває з відстанню r від його осі назад пропорційно цій відстані.

У випадку тонкого тороїда, коли діаметр котушки $D << r$ (див. рис.), індукція магнітного поля в межах тороїда мало змінюється з відстанню і виходить формула, аналогічна формулі для соленоїда:

$$B = \mu_o nI,$$

де $n = \dfrac{N}{2\pi r}$ – лінійна щільність числа витків обмотки тороїда.