<u>Лекция №1.</u>
ГАРМОНИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ

Колебательные процессы широко распространены в природе и технике. При движении маятника колеблется его центр тяжести. В случае переменного тока колеблются напряжение и ток в цепи. Эти два процесса различны по своей физической природе, однако их закономерности имеют между собой много общего.

Если при отклонении от *положения равновесия* на тело действует сила, направленная к положению равновесия, то тело будет совершать колебательное движение.

При небольших отклонениях сила пропорциональна отклонению и колебания будут *гармоническими*, т.е. такими, которые описываются синусом или косинусом. Тело, совершающее гармонические колебания, носит название *гармонического осциллятора*. Гармоническими осцилляторами являются рассматриваемые ниже математический, физический и пружинный маятники, а также электрический колебательный контур.

<u>Виды колебаний:</u>

- свободные (колебания происходят в системе предоставленной самой себе);
- вынужденные (система подвергается воздействию периодической внешней силы);
- автоколебания (момент воздействия внешней силы определяется самой системой);
- параметрические (изменение какого-либо параметра системы в результате внешнего воздействия).

Пружинный маятник

Рассмотрим движение тела массой m, закрепленного на пружине и находящегося на гладкой горизонтальной поверхности (рис.1). Такое устройство называется *пружинным маятником*. Когда пружина не деформирована, центр масс тела расположен в точке $x=0$ координатной оси X, вдоль которой происходит его движение.

Если пружину растянуть или сжать ($x<0$), возникает упругая сила, стремящаяся вернуть тело в исходное положение. По закону Гука *при упругой деформации сила упругости пропорциональна величине деформации* x:

$$F_{упр} = -k\,x, \qquad (1)$$

где k – жесткость пружины.

Знак “минус” указывает на то, что сила упругости $F_{упр}$ направлена в сторону, противоположную смещению тела, т.е. к положению равновесия, и является возвращающей. Если пренебречь трением, уравнение движения (второй закон Ньютона) принимает вид $m\ddot{x} = -k\,x$ или

$$m\ddot{x} + k\,x = 0\ . \qquad (2)$$

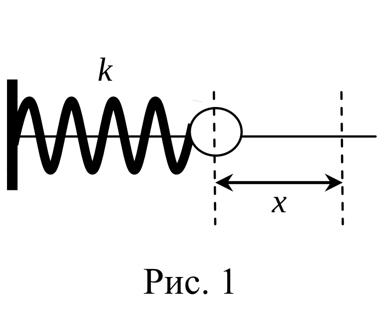

Рис. 1

Разделив на m и перенеся правую часть в левую часть уравнения, получим дифференциальное уравнение *свободных* *гармонических колебаний*:

$$\ddot{x}+\omega_0{}^2 x=0. \qquad (3)$$

В данном случае индекс "0" означает, что ω_0 есть собственная циклическая частота колебаний системы *без трения*.

Постоянная ω_0 имеет размерность обратного времени и равна

$$\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}, \qquad [\omega]=1/\text{с}. \qquad (4)$$

Решением уравнения (3) является функция

$$x(t)=A\cos(\omega_0 t+\varphi_0), \qquad (5)$$

которая является его решением *при любых значениях* постоянных A и φ_0. Вычислим зависимость скорости от времени при гармонических колебаниях

$$\upsilon=\dot{x}=-A\omega_0\sin(\omega_0 t+\varphi_0), \qquad (6)$$

тогда ускорение определяется выражением:

$$a=\dot{\upsilon}=\ddot{x}=-A\,\omega_0^2\cos(\omega_0 t+\varphi_0). \qquad (7)$$

Из (6) и (7) видно, что $\upsilon_{max}=A\omega_0$ и $a_{max}=A\omega_0{}^2$.

Функция $x(t)$ описывает смещение тела от положения равновесия, которое происходит периодически в обе стороны, т.е. тело совершает колебательное движение. Наибольшее смещение A от положения равновесия называется *амплитудой колебаний*, функция $\varphi=\omega_0 t+\varphi_0$, стоящая под знаком косинуса, – *фазой колебаний*, а ее значение φ_0 при $t=0$ – *начальной фазой*. Начальная фаза показывает, каковы были смещение, и скорость тела в начальный момент времени.

Угловая скорость ω называется *круговой* или *циклической частотой* колебаний.

Период колебаний T – время, в течение которого происходит одно колебание. Из уравнения (5) следует:

$$\cos[\,\omega(t+T)+\varphi_0]=\cos(\,\omega t+\varphi_0+2\pi),$$

откуда период колебаний:

$$T=\frac{2\pi}{\omega}.$$

Если за время t происходит N колебаний, то период $T=t/N$. *Число колебаний, совершаемых за единицу времени, называется частотой колебаний*. Частота и период – взаимно обратные величины:

$$\nu=N/t=1/T. \qquad (9)$$

В СИ период измеряется в *секундах* (с), а частота – в *герцах* (Гц): 1 Гц = 1 с$^{-1}$.

Сравнивая формулы (8) и (9), можно найти связь ν с циклической частотой ω:

$$\omega=2\pi\nu. \qquad (10)$$

График функции $x(t)$ приведен на рис.2. Форма кривой на графике определяется амплитудой A и циклической частотой ω, а ее положение относительно оси ординат (сдвиг всей кривой по оси t) – начальной фазой φ_0. При $\varphi_0 = 0$ $x = A\cos\,\omega_0 t$ (рис.2,*а*); если $\varphi_0 = -\pi/2$, то $x = A\sin\,\omega_0 t$. На рис.2,*б* показана зависимость от времени скорости тела (при $\varphi_0 = 0$).

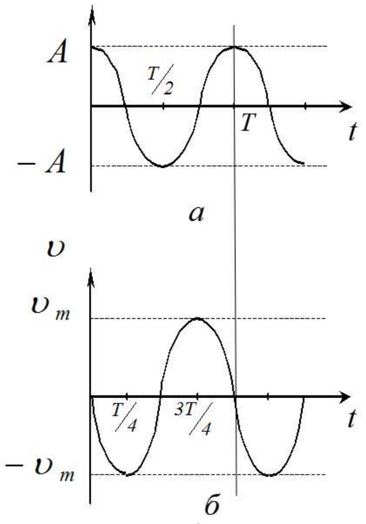

Рис.2

Сравнивая графики функций $x(t)$ и $\upsilon(t)$, видим, что при максимальном отклонении от положения равновесия скорость тела обращается в нуль. При прохождении положения равновесия, наоборот, скорость тела максимальна.

Период колебаний пружинного маятника, согласно (4) и (8) есть:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \qquad (11)$$

Период не зависит от амплитуды. Это его свойство называется *изохронностью* и имеет место при малых деформациях пружины, пока справедлив закон Гука. При больших деформациях появляется зависимость периода колебаний от амплитуды. Колебания в этом случае называются *ангармоническими*.

Амплитуда и начальная фаза определяются *начальными условиями*

$$x(0) = x_0, \quad \upsilon(0) = \upsilon_0. \qquad (12)$$

Преобразование энергии при механических колебаниях

Энергия маятника складывается из кинетической энергии $W_к$ тела, движущегося со скоростью υ, и потенциальной энергии W_p пружины, деформированной на величину x:

$$W = W_к + W_p = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{kx^2}{2}.$$

Подставляя сюда $x(t)$ из уравнения (5) и $\upsilon(t)$ из уравнения (6), имеем:

$$W_к = \frac{m\omega_0^{\,2}A^2}{2}\,\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0),$$

$$W_p = \frac{kA^2}{2}\,\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0).$$

С учетом того что $\omega_0^{\;2} = k/m$, формула (4), получаем, что полная энергия маятника (осциллятора) не зависит от времени

$$W_{total} = W_k + W_p = \frac{m\omega_0^{\,2}A^2}{2} = \frac{kA^2}{2}$$

при этом в течение одного периода полная энергия W *дважды* целиком переходит в кинетическую энергию $W_к$ и *дважды* – в потенциальную энергию W_p.

Физический маятник

Физическим маятником называют абсолютно твердое тело, закрепленное на горизонтальной оси, не проходящей через центр его масс, и совершающее вокруг этой оси колебания под действием силы тяжести.

На рис.3 показано сечение этого тела плоскостью, перпендикулярной оси вращения O. Точка C – центр масс. Отрезок OC длиной l, соединяющий ось с центром масс, обозначим вектором $\vec{l}$.

Пусть маятник отклонен от положения равновесия влево на небольшой угол γ. На него действует момент силы тяжести $\vec{M} = \left[\vec{l}, m\vec{g}\right]$. Вектор $\vec{M}$ направлен вдоль оси O к наблюдателю, т.е. к нам, а его модуль

$$M = mgl\sin\gamma, \tag{13}$$

где m – масса маятника, g – ускорение свободного падения.

При малых углах $\sin\gamma \approx \gamma$ уравнение (13) можно записать в виде

$$M = -mgl\gamma.$$

Знак “минус” указывает на то, что направления аксиальных векторов $\vec{M}$ и $\vec{\gamma}$ взаимно противоположны. Следовательно, момент силы тяжести всегда стремится вернуть маятник в положение равновесия.

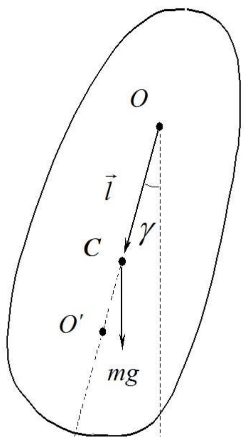

Рис.3

Уравнение движения маятника $J\varepsilon = M$ имеет вид

$$J\ddot{\gamma} = -mgl\gamma, \tag{14}$$

где J – момент инерции маятника относительно оси O.

Разделив на J и перенося правую часть влево, получим уравнение

$$\ddot{\gamma} + \omega_0^{\,2}\gamma = 0, \tag{15}$$

аналогичное уравнению (3). Из него следует, что маятник совершает около положения равновесия гармонические колебания с циклической частотой

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mgl}{J}} \tag{16}$$

и периодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mgl}}. \tag{17}$$

Обратим внимание на то, что момент инерции физического маятника относительно оси O необходимо вычислить по теореме Штейнера:

$$J = J_c + mb^2, \tag{18}$$

где J_c – момент инерции относительно оси, параллельной оси O проходящей через центр его масс (приведен в таблице в разделе «МЕХАНИКА»), b – расстояние между этими осями.

Математический маятник

Математическим маятником называется материальная точка, подвешенная на невесомой и нерастяжимой нити и совершающая колебания под действием силы тяжести.

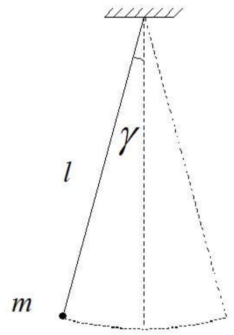

Рис.4

Его можно рассматривать как физический маятник, вся масса которого m на расстоянии l от точки подвеса (рис.4). В этом случае момент инерции $J = ml^2$ и формула (17) приобретает вид

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (19)$$

Если в формуле (17) положить

$$l' = \frac{J}{ml}\ , \qquad (20)$$

то она приобретает вид (19). *Длина l' математического маятника, имеющего тот же период колебаний, что и у данного физического маятника, носит название приведенной длины этого физического маятника.*

Приведенная длина l' больше l (см. рис.3). В самом деле, по теореме Штейнера, момент инерции физического маятника относительно оси O:

$$J = J_c + ml^2, \qquad (21)$$

где J_c – момент инерции относительно оси, параллельной оси O и проходящей через центр его масс. Подставив в (20) выражение (21), получим $l' = l + \frac{J_c}{ml}$, откуда и следует, что $l' > l$. Точку O', показанную на рис.3 на продолжении прямой OC на расстоянии l' от точки O, называют *центром качаний* маятника. Если ось вращения перенести параллельно самой себе в центр качаний O', то период колебаний маятника останется прежним. Точка O будет теперь новым центром качаний по отношению к точке O'.

Электромагнитные колебания. Колебательный *LC*-контур

Рассмотрим *LC*-контур, состоящий из конденсатора емкостью C и катушки индуктивностью L (рис.5). Электрические колебания в контуре аналогичны колебаниям маятника. В колебательном контуре первоначальный запас энергии электрического поля заряженного конденсатора преобразуется в энергию магнитного поля катушки с током, которая затем снова преобразуется в энергию заряженного конденсатора.

Пусть q – заряд одной из обкладок конденсатора, тогда сила тока в цепи равна $i(t) = dq/dt = \dot{q}$, здесь маленькими буквами будем обозначать мгновенные значения тока и напряжения i, u, а их амплитудные значения – большими I,U .

Напряжение на конденсаторе u_C равно действующей в цепи ЭДС самоиндукции $\varepsilon_c = -L\,\dfrac{di}{dt} = -L\ddot{q}$.

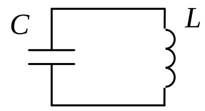

Рис.5

Подставляя сюда $u_C = q/C$ и i, получаем

$$L\,\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0.$$

Это уравнение аналогично уравнению свободных гармонических колебаний маятника, рассмотренных в механике. Решение его имеет вид

$$q(t) = q_m \cos\,\omega_0 t,$$

где $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ – собственная циклическая частота колебаний заряда в системе, q_m – максимальный заряд конденсатора,

Так как ток в цепи $i = dq/dt$, имеем

$$i(t) = -I_m \sin\omega_0 t = I_m \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}),$$

где $I_m = \omega_0 q_m = \dfrac{q_m}{\sqrt{LC}}$ – амплитудное значение тока.

Периоды колебаний заряда конденсатора и тока в цепи выражаются *формулой Томсона*, которая следует из формулы $T = 2\pi/\omega_0$ и выражения для ω_0, которое мы получили ранее, т.о.

$$T = 2\pi\sqrt{LC}.$$

Напряжение на конденсаторе совпадает по фазе с колебаниями заряда т.к.

$$u_C = \frac{q(t)}{C} = \frac{q_m}{C}\cos\,\omega_0 t = U_m \cos\,\omega_0 t,$$

где $U_m = \dfrac{q_m}{C}$ - максимальное напряжение на конденсаторе.

Сравнивая выражения $i(t)$ и $u(t)$ говорят, что ток на конденсаторе опережает напряжение по фазе на $\dfrac{\pi}{2}\,рад$.

Отношение U_m к I_m называют **волновым сопротивлением колебательного контура** $R_{вол}$

$$R_{вол} = \frac{q_m}{C} : \frac{q_m}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}}.$$

Роль кинетической и потенциальной энергий в колебательном контуре играют магнитная и электрическая энергии:

$$W_{el}(t) = \frac{Cu^2(t)}{2} = \frac{q^2(t)}{2C}, \qquad W_{mag}(t) = \frac{Li^2(t)}{2}.$$

$$W_{total} = W_{el}(t) + W_{mag}(t) = \frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}$$ - не зависит от времени.