Лекція №1.

Гармонійне коливання

Коливальні процеси широко поширені в природі і техніці. При русі маятника коливається його центр ваги. У разі змінного струму коливаються напруга і струм в ланцюзі. Ці два процеси різні за своєю фізичною природою, проте їх закономірності мають між собою багато спільного.

Якщо при відхиленні від положення рівноваги на тіло діє сила, спрямована до положення рівноваги, то тіло буде здійснювати коливальний рух.
При невеликих відхиленнях сила пропорційна відхиленню і коливання будуть гармонійними, тобто такими, які описуються синусом або косинусом.
Тіло, яке здійснює гармонійні коливання, носить назву гармонійного осцилятора. Гармонійними осцилляторами є що розглядаються нижче математичний, фізичний і пружинний маятники, а також електричний коливальний контур.

Види коливань:
- вільні (коливання відбуваються в системі наданій самій собі);
- вимушені (система піддається впливу періодичної зовнішньої сили);
- автоколебания (момент впливу зовнішньої сили визначається самою системою);
- параметричні (зміна будь-якого параметра системи в результаті зовнішнього впливу).

пружинний маятник

Розглянемо рух тіла масою, закріпленого на пружині і знаходиться на гладкій горизонтальній поверхні (рис.1). Такий пристрій називається пружинним маятником. Коли пружина не деформована, центр мас тіла розташований в точці координатної осі, вздовж якої відбувається його рух.
Якщо пружину розтягнути або стиснути (), виникає пружна сила, яка прагне повернути тіло в початкове положення. Згідно із законом Гука при пружною деформації сила пружності пропорційна величині деформації:

$$F_{упр} = -k\,x, \qquad (1)$$

где k – жесткость пружины.
де - жорсткість пружини. Знак "мінус" вказує на те, що сила пружності спрямована в бік, протилежний зміщенню тіла, тобто до положення рівноваги, і повернення. Якщо знехтувати тертям, рівняння руху (другий закон Ньютона) набирає вигляду $m\ddot{x} = -k\,x$ или

$$m\ddot{x} + k\,x = 0\,. \qquad (2)$$

Розділивши на m і перенісши праву частину в ліву частину рівняння, отримаємо диференціальне рівняння *вільних гармонійних коливань*: $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$. (3)

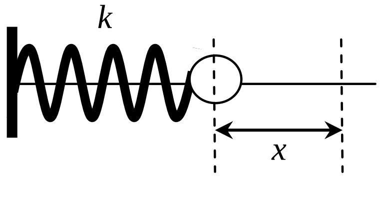

Рис. 1

В даному випадку індекс "0" означає, що ω_0 є власна циклічна частота коливань системи *без тертя*.

Постійна ω_0 має розмірність зворотного часу і дорівнює $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$, (4)

$$[\omega] = 1/\text{с}.$$

Рішенням рівняння (3) є функція $x(t) = A cos(\omega_0 t + \varphi_0)$, (5)

яка є його рішенням при будь-яких значеннях постійних A і φ_0. Обчислимо залежність швидкості від часу при гармонічних коливання х

$$\upsilon = \dot{x} = -A\omega_0 \, sin(\omega_0 t + \varphi_0), \tag{6}$$

тоді прискорення визначається виразом:

$$a = \dot{\upsilon} = \ddot{x} = -A\,\omega_0^2 \, cos(\omega_0 t + \varphi_0). \tag{7}$$

З (6) і (7) видно, що $\upsilon_{max} = A\omega_0$ и $a_{max} = A\omega_0{}^2$.

Функциія $x(t)$ описує зсув тіла від положення рівноваги, яке відбувається періодично в обидві сторони, тобто тіло здійснює коливальний рух. найбільше зміщення A від положення рівноваги називається *амплітудою коливань*, функція $\varphi = \omega_0 t + \varphi_0$, що стоїть під знаком косинуса, - *фазою коливань*, а її значення φ_0 при $t = 0$ – *початковою фазою*. Початкова фаза показує, які були зсув, і швидкість тіла в початковий момент часу.

Кутова швидкість ω називається *круговою* або *циклічною* частотою коливань.

Період коливань T *– час, протягом якого відбувається одне коливання.* З рівняння (5) слідує:

$$cos[\,\omega(t+T)+\varphi_0] = cos(\,\omega t + \varphi_0 + 2\pi),$$

звідки період коливань:

$$T = \frac{2\pi}{\omega}.$$

Якщо за час t відбувається N коливань, то період $T = t/N$. Число коливань, *що здійснюються за одиницю часу, називається частотою коливань.* Частота і період - взаємно зворотні величини:

$$\nu = N/t = 1/T. \tag{9}$$

В СІ період вимірюється в секундах (с), а частота - в герцах (Гц):

$$1 \text{ Гц} = 1 \text{ с}^{-1}.$$

Порівнюючи формули (8) і (9), можна знайти зв'язок ν з циклічною частотою ω:

$$\omega = 2\pi\nu\,. \tag{10}$$

Графік функції $x(t)$ наведено на рис.2.

Форма кривої на графіку визначається амплітудою A і циклічною частотою , А її положення щодо осі ординат (зрушення всієї

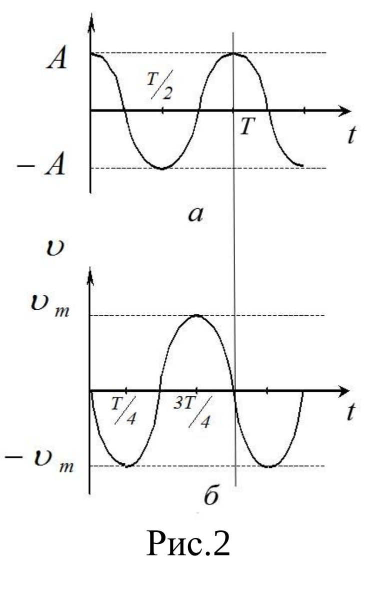

Рис.2

кривої по осі t) – початковою фазою φ_0. При $\varphi_0 = 0$ $x = A\cos\,\omega_0 t$ (рис.2,*a*); если $\varphi_0 = -\pi / 2$, то $x = A\sin\,\omega_0 t$. На рис.2, б показана залежність від часу швидкості тіла (при φ_0=0). Порівнюючи графіки функцій $x(t)$і $v(t)$, бачимо, що при максимальному відхиленні від положення рівноваги швидкість тіла звертається в нуль. При проходженні положення рівноваги, навпаки, швидкість тіла максимальна.

Період коливань пружинного маятника, згідно (4) і (8) є:

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}\,. \tag{11}$$

Період не залежить від амплітуди. Це його властивість називається ізохронними і має місце при малих деформаціях пружини, поки справедливий закон Гука. При великих деформаціях з'являється залежність періоду коливань від амплітуди. Коливання в цьому випадку називаються ангармонічного.

Амплітуда і початкова фаза визначаються початковими умовами

$$x(0) = x_0, \quad \upsilon(0) = \upsilon_0\,. \tag{12}$$

Перетворення енергії при механічних коливаннях

Енергія маятника складається з кінетичної енергії $W_к$ тіла, що рухається зі швидкістю W_p, і потенційної енергії пружиниv, деформованої на величину x:

$$W = W_к + W_p = \frac{m\upsilon^2}{2} + \frac{k\,x^2}{2}\,.$$

Підставляючи сюди $x(t)$ з рівняння (5) і $\upsilon(t)$ з рівняння (6), маємо:

$$W_к = \frac{m\omega_0{}^2 A^2}{2}\,\sin^2(\omega_0 t + \varphi_0)\,,$$

$$W_p = \frac{k\,A^2}{2}\,\cos^2(\omega_0 t + \varphi_0)\,.$$

З врахуванням того, що $\omega_0{}^2 = k / m$, формула (4), отримуємо, що повна енергія маятника (осцилятора) не залежить від часу

$$W_{total} = W_k + W_p = \frac{m\omega_0{}^2 A^2}{2} = \frac{k\,A^2}{2}$$

при цьому протягом одного періоду повна енергія W *двічі цілком переходить в кінетичну енергію* $W_к$ і двічі - в потенційну енергію W_p.

Фізичний маятник

Фізичним маятником називають абсолютно тверде тіло, закріплене на горизонтальній осі, що не проходить через центр його мас, і вчиняє навколо цієї осі коливання під дією сили тяжіння.

На рис.3 показано перетин цього тіла площиною, перпендикулярній осі обертання O. Точка C – центр мас. Відрізок OC довжиною l, з'єднує вісь з центром мас, позначимо вектором $\vec{l}$.

Нехай маятник відхилений від положення рівноваги вліво на невеликий кут γ. На нього діє момент сили тяжіння $\vec{M} = \left[\vec{l}, m\vec{g}\right]$. Вектор $\vec{M}$ направлений уздовж осі O до спостерігача, тобто до нас, а його модуль

$$M = mgl\sin\gamma, \qquad (13)$$

де m – маса маятника, g – прискорення вільного падіння.

При малих кутах $\sin\gamma \approx \gamma$ рівняння (13) можна записати у вигляді

$$M = -mgl\gamma.$$

Знак "мінус" вказує на те, що напрямки аксіальних векторів $\vec{M}$ і $\vec{\gamma}$ взаємно протилежні. Отже, момент сили тяжіння завжди прагне повернути маятник в положення рівноваги.

Рівняння руху маятника $J\varepsilon = M$ має вигляд

$$J\ddot{\gamma} = -mgl\gamma, \qquad (14)$$

де J – момент інерції маятника щодо осі O.

розділивши на J і переносячи праву частину вліво, отримаємо рівняння

$$\ddot{\gamma} + \omega_0{}^2\gamma = 0, \qquad (15)$$

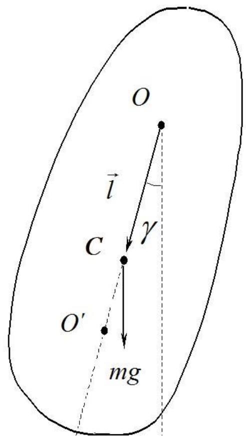

Рис.3

аналогічне рівняння (3). З нього випливає, що маятник здійснює близько положення рівноваги гармонійні коливання с циклічною частотою

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{mg\,l}{J}} \qquad (16)$$

і періодом

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mg\,l}}. \qquad (17)$$

Звернемо увагу на те, що момент інерції фізичного маятника щодо осі O необхідно обчислити по теоремі Штейнера:

$$J = J_c + mb^2, \qquad (18)$$

де J_c – момент інерції щодо осі, паралельної осі O що проходить через центр його мас (наведено в таблиці в розділі «МЕХАНІКА»), b – відстань між цими осями.

Математичний маятник

Математичним маятником називається матеріальна точка, підвішена на невагомою і нерастяжимой нитки і здійснює коливання під дією сили тяжіння.

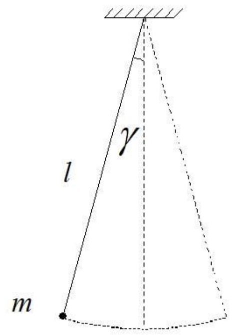

Рис.4

Його можна розглядати як фізичний маятник, вся маса якого m на відстані l від точки підвісу (рис.4). У цьому випадку момент інерції $J = ml^2$ і формула (17) набуває вигляду

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}}. \qquad (19)$$

Якщо у формулі (17) покласти

$$l' = \frac{J}{ml}, \qquad (20)$$

то вона набуває вигляду (19). довжина l' математичного маятника, що має той же період коливань, що і у даного фізичного маятника, носить назву приведеної довжини цього фізичного маятника. Наведена довжина l' більше l (Див. Рис.3). На справді, за теоремою Штейнера, момент інерції фізичного маятника щодо осі O:

$$J = J_c + ml^2, \qquad (21)$$

де J_C – момент інерції щодо осі, паралельної осі O і що проходить через центр його мас. Підставивши в (20) вираз (21), отримаємо

$l' = l + \dfrac{J_C}{ml}$, звідки і випливає, що $l' > l$. Точку O', показану на рис.3 на продовженні прямої OC на відстані l' Від точки O, називають *центром хитань* маятника. Якщо вісь обертання перенести паралельно самій собі в центр хитань O', то період коливань маятника залишиться колишнім.
Точка O буде тепер новим центром хитань по відношенню до точки O'.

Електромагнітні коливання. Коливальний *LC*-контур

Розглянемо LC-контур, що складається з конденсатора ємністю і котушки індуктивністю (рис.5). Електричні коливання в контурі аналогічні коливань маятника. У коливальному контурі початковий запас енергії електричного поля зарядженого конденсатора перетворюється в енергію магнітного поля котушки зі струмом, яка потім знову перетвориться в енергію зарядженого конденсатора.

нехай q – заряд однієї з обкладок конденсатора, тоді сила струму в ланцюзі дорівнює $i(t) = dq/dt = \dot{q}$, тут маленькими літерами будемо позначати миттєві значення струму і напруги i, u, а їх амплітудні значення - великими I, U .

Напруга на конденсаторі дорівнює діючої в ланцюзі ЕРС самоіндукції $\varepsilon_c = -L\,\dfrac{di}{dt} = -L\ddot{q}$.

підставляючи сюди $u_C = q/C$ и i, отримуємо

$$L\,\ddot{q} + \frac{1}{C}q = 0.$$

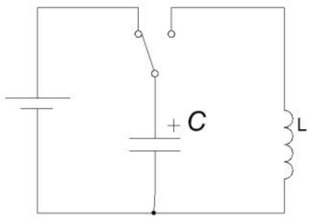

Рис.5

Це рівняння аналогічно рівнянню вільних гармонійних коливань маятника, розглянутих в механіці. Рішення його має вигляд

$$q(t) = q_m \cos\,\omega_0\,t\,,$$

де $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ – власна циклічна частота коливань заряду в системі,

q_m – максимальний заряд конденсатора,

Так як струм в ланцюзі $i = dq/dt$, маємо

$$i(t) = -I_m \sin\omega_0 t = I_m \cos(\omega_0 t + \frac{\pi}{2}),$$

де $I_m = \omega_0 q_m = \dfrac{q_m}{\sqrt{LC}}$ – амплітудне значення струму.

Періоди коливань заряду конденсатора і струму в ланцюзі виражаються *формулою Томсона*, яка випливає з формули $T = 2\pi/\omega_0$ і вирази для ω_0, яке ми отримали раніше, таким чином

$$T = 2\pi\sqrt{LC}\,.$$

Напруга на конденсаторі збігається по фазі з коливаннями заряду

$$\text{тому}\, u_C = \frac{q(t)}{C} = \frac{q_m}{C}\cos\,\omega_0\,t = U_m \cos\,\omega_0\,t\,,$$

де $U_m = \dfrac{q_m}{C}$ - максимальна напруга на конденсаторі.

порівнюючи вирази $i(t)$ і $u(t)$ кажуть, що струм на конденсаторі випереджає напругу по фазі на $\dfrac{\pi}{2}\,рад$.

ставлення U_m до I_m називають **хвильовим опором коливального контуру** $R_{вол}$

$$R_{вол} = \frac{q_m}{C} : \frac{q_m}{\sqrt{LC}} = \sqrt{\frac{L}{C}}\,.$$

Роль кінетичної і потенційної енергій в коливальному контурі грають магнітна і електрична енергії:

$$W_{el}(t) = \frac{Cu^2(t)}{2} = \frac{q^2(t)}{2C}, \qquad W_{mag}(t) = \frac{Li^2(t)}{2}.$$

$$W_{total} = W_{el}(t) + W_{mag}(t) = \frac{CU_m^2}{2} = \frac{LI_m^2}{2}$$ - не залежить від часу.