Лекція №3.

ВИМУШЕНІ КОЛИВАННЯ. РЕЗОНАНС

Розглянемо коливання, яке здійснює закріплене на пружині тіло, якщо на нього крім пружної сили і сили опору діє ще додаткова періодична сила. Нехай ця зовнішня сила змінюється з часом за законом

$$F(t) = F_0 \ cos\,\Omega\,t\,, \tag{1}$$

Де F_0 - її амплітуда, - Ω циклічна частота.

Рівняння руху (другий закон Ньютона) набуває вигляду

$$m\ddot{x} = -k\,x - r\,\dot{x} + F_0\,cos\,\Omega\,t \tag{2}$$

де m- маса тіла, k - жорсткість пружини,r - коефіцієнт опору.

Розділивши (2) на, m отримаємо рівняння, яке відрізняється від рівняння затухаючих коливань правою частиною:

$$\ddot{x} + 2\beta\,\dot{x} + \omega_0^2\,x \ = \ \frac{F_0}{m}\ cos\,\Omega\,t \tag{3}$$

Коефіцієнти β і ω_0 позначають відповідно коефіцієнт загасання і власну циклічну частоту коливань системи.

Отримане рівняння - неоднорідне диференціальне рівняння, тобто його права частина відмінна від нуля. Тому його рішення можна представити у вигляді суми двох функцій: загального рішення однорідного рівняння і приватного рішення неоднорідного рівняння. Оскільки рішення однорідного рівняння пропорційно $e^{-\beta t}$, то при $t \to \infty$ воно звертається в нуль, тому шукане рішення рівняння (3) зводиться до приватного рішення, яке будемо шукати у вигляді періодичної функції:

$$x(t) \ = A\,cos\,(\Omega t - \Phi)\,, \tag{4}$$

змінюється з частотою сили Ω, що вимушує . Константи А і Ф можуть бути знайдені з рівнянням (3). При цьому А - амплітуда вимушених коливань, а Ф - зсув фаз між змушує силу і зміщенням тіла від положення рівноваги.

Підставляючи (4) в рівняння (3) і користуючись діаграмним методом знаходимо

$$A = \frac{F_0\,/\,m}{\sqrt{(\omega_0^2 - \Omega^2)^2 + 4\,\beta^2\Omega^2}} \tag{5}$$

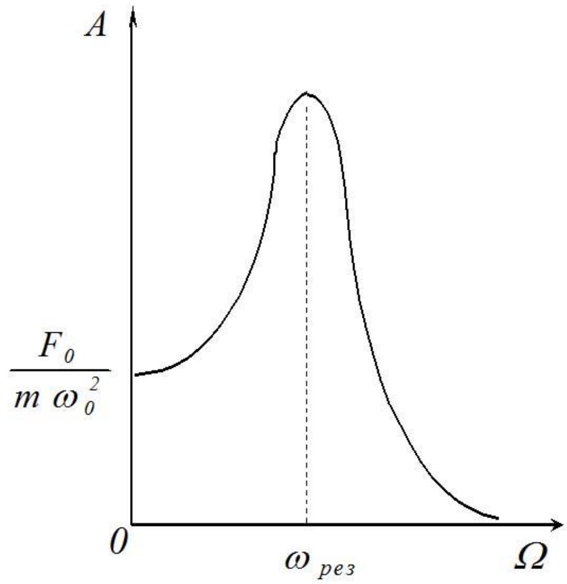
Та

$$tg\,\Phi = \frac{2\beta\,\Omega}{\omega_0^2 - \Omega^2}\,. \tag{6}$$

Рівняння (5) дозволяє проаналізувати залежність амплітуди А ви-вимушених коливань від частоти змушуючої сили Ω. Графік цієї за-лежно показаний на рис.1. Функція $A = A(\Omega)$ має максимум при

$$\Omega = \omega_{рез} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\beta^2}\ , \qquad (7)$$

де $\omega_{рез}$ - називається резонансною частотою. При малому опорі руху ($\beta << \omega_0$) $\omega_{рез}$ практично збігається з власною частотою коливань системи ω_0. Розглянемо випадок, коли частота змушує сили $\Omega \to 0$. Тоді амплітуда вимушених коливань А$\to$ $F_0 / m\omega_0^2$, а зрушення фаз $\Phi = 0$. Отриманий вираз називається статичним відхиленням



$$A_{стат} = F_0 / m\omega_0^2\ .$$

Якщо частота змушує сили Ω збігатися з частотою $\omega_{рез}$. Амплітуда вимушених коливань при цьому стає максимальної (див. Рис.1) і досягає значення

$$A_{рез} = \frac{F_0}{2m\,\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}}\ . \qquad (8)$$

Ми маємо справу з явищем резонансу. Резонансом називається різке зростання амплітуди вимушених коливань, коли частота змушує сили наближається до власної частоти коливань системи.

Зауважимо, що в разі слабких затухань $\beta \to 0$ резонансна амплітуда прагне до нескінченності $A_{рез} \to \infty$.

Обчислимо відношення амплітуди при резонансі до амплітуди статичного відхилення для слабких затуханий (тобто $\omega_0 >> \beta$)

$$\frac{A_{рез}}{A_{стат}} = \frac{F_0}{2m\,\beta\sqrt{\omega_0^2 - \beta^2}} : \frac{F_0}{m\omega_0^2} \approx \frac{F_0}{2m\,\beta\omega_0}\frac{m\omega_0^2}{F_0} = \frac{\omega_0}{2\beta} \approx \frac{2\pi / T}{2\delta / T} = \frac{\pi}{\delta} = Q$$

тобто добротність Q показує, у скільки разів амплітуда при резонансі перевищує статичну відхилення під дією постійної сили тієї ж величини.

Закон Ома для синусоїдальних змінних струмів.

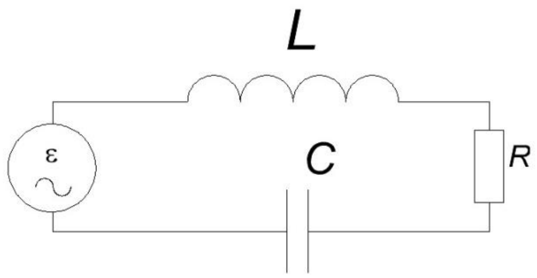


Рис.2

Будемо вважати, що струм квазістаціонарний (тобто в даний момент часу у всіх точках ланцюга величина струму однакова) і зовнішня ЕРС змінюється за гармонійним законом

$$\varepsilon(t) = \varepsilon_0 \cos(\Omega t)$$

$i(t) = \dot{q} = \dfrac{dq}{dt}$ - кількість заряду, який минає через перетин в одиницю часу. Тоді (див. Матеріал, викладений раніше) дана система буде описуватися наступним диференціальним рівнянням

$$L\ddot{q}(t) + \dot{q}(t)R + \frac{q(t)}{C} = \varepsilon_0 \cos(\Omega t)$$

Розглянемо типові випадки.

1. У колі змінного струму тільки активний опір.

Тоді диференціальне рівняння набирає вигляду

$$\dot{q}R = \varepsilon_0 \cos(\Omega t)$$

Тобто

$$i(t) = \dot{q} = \frac{\varepsilon_0}{R} \cos(\Omega t) = I_R \cos(\Omega t)$$

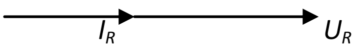
Напруга в опорі

$$u_R = i(t)\,R = \dot{q}R = U_R \cos(\Omega t)$$

Де $U_R = I_R \cdot R$ - амплітуди струму і напруги.

Тобто коливання струму і напруги відбуваються в одній фазі.

Векторна діаграма має наступний вигляд



2. У колі змінного струму тільки котушка індуктивністю L.

Тоді

$$L\ddot{q} = \varepsilon_0 \cos(\Omega t)$$

Так як $i = \dot{q}$, то маємо

$$L\frac{di}{dt} = \varepsilon_0 \cos(\Omega t)$$

Вирішити дане диференціальне рівняння дуже просто: поділяємо змінні та інтегруємо

$$Ldi = \varepsilon_0 \cos(\Omega t)dt \quad \Rightarrow \quad \int Ldi = \int \varepsilon_0 \cos(\Omega t)dt \quad \Rightarrow \quad L \cdot i = \frac{\varepsilon_0}{\Omega}\sin(\Omega t)$$

Так як $\sin(\alpha) = \cos(\alpha - \pi/2)$, то маємо

$$i(t) = \frac{\varepsilon_0}{\Omega L}\cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) = I_L \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right),$$

Де $\frac{\varepsilon_0}{\Omega L} = I_L$ - максимальний струм минаючий через котушку індуктивності в данному випадку.

Порівнюючи цей вираз з звичайним законом Ома бачимо, що вираз ΩL має сенс опору і його називають:

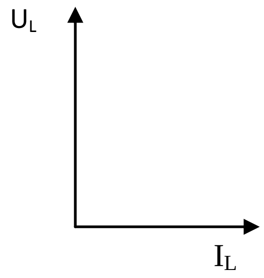
реактивний опір котушки індуктивності $X_L = \Omega L$.

Напруга на котушці u_L, в даному випадку, збігається з ЕРС

$$\begin{cases} i_L(t) = I_L \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right), \\ u_L(t) = U_L \cos(\Omega t) \end{cases}$$

де $U_L = I_L \cdot \Omega L = I_L \cdot X_L$. Тому кажуть, що на котушці індуктивності струм відстає від напруги по фазі на $\pi/2$ радіан.

Маємо наступну векторну діаграму



3. У колі змінного струму тільки конденсатор ємністю.

Тоді маємо рівняння

$$\frac{q(t)}{C} = \varepsilon_0 \cos(\Omega t)$$

Так як, тоді

$$i = \dot{q} = \frac{d}{dt}\left(\varepsilon_0 \cdot C \cdot \cos(\Omega t)\right) = -\varepsilon_0 \cdot C \cdot \Omega \cdot \sin(\Omega t) = \varepsilon_0 \cdot C \cdot \Omega \cdot \sin(\text{-}\Omega t)$$

Врахуємо, що $\sin(\text{-}\alpha) = \cos(\text{-}\alpha - \pi/2) = \cos(\alpha + \pi/2)$, отримуємо

$$i = \varepsilon_0 \cdot C \cdot \Omega \cdot \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right) = I_C \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right)$$

Використовуючи закон Ома, бачимо, що електричний опір конденсатора X_C дорівнює

$$X_C = \frac{\varepsilon_0}{I_C} = \frac{\varepsilon_0}{\varepsilon_0 \cdot \Omega \cdot C} = \frac{1}{\Omega \cdot C}$$

і називається - реактивний опір конденсатора $X_C = \dfrac{1}{\Omega \cdot C}$.

Так як напруга на конденсаторі $u_C(t) = \dfrac{q(t)}{C}$, тоді $u_C(t) = U_C \cos(\Omega t)$,

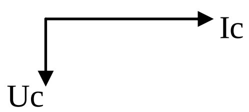
Де $U_C = \dfrac{I_C}{\Omega \cdot C} = I_C \cdot X_C$.

Згадуючи, що струм через конденсатор визначається виразом

$$i = I_C \cos\left(\Omega t + \frac{\pi}{2}\right),$$

видим, что ток по фазе опережает напряжение на $\pi/2$ радиан .

Маємо наступну векторну діаграму.



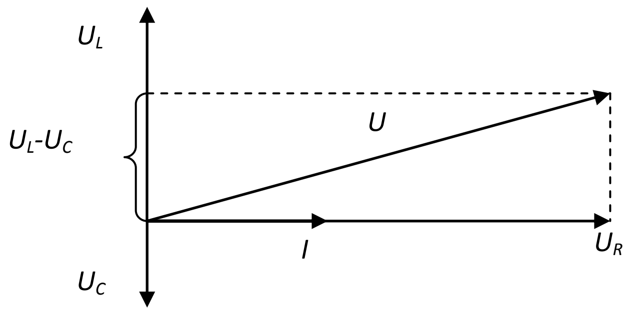
4. Послідовне з'єднання в ланцюзі змінного струму R,L,C.

В даному випадку маємо наступне диференціальне рівняння

$$L\ddot{q}(t)+\dot{q}(t)R+\frac{q(t)}{C}=\varepsilon_0\cos(\Omega t)$$

Зауважимо, що і котушка, і конденсатор зрушують фазу на $\frac{\pi}{2}$ тільки в різні боки. На активному опорі коливання струму і ЕРС синфазних. На котушці фази коливань зсуваються на $\left(-\frac{\pi}{2}\right)$. На конденсаторі фази коливань зсуваються на $\left(\frac{\pi}{2}\right)$. Струм однаковий для котушки, опору, конденсатора:

$$I_R=\frac{\varepsilon}{R},I_{0R}=\frac{U_{0R}}{R},U_{0R}=I_{0R}R$$



$$U_R=I_R\cdot R,$$

Поэтому общее амплитудное значение напряжения найдем, построив следующую диаграмму

Таким чином, загальне напруження визначається виразом

$$U=\sqrt{U_R^2+\left(U_L-U_C\right)^2}$$

Підставами сюди вирази отримані вище:

$$U_L=I_L\cdot X_L,$$

$$U_C=I_C\cdot X_C.$$

Так як опір, конденсатор і котушка індуктивності з'єднані послідовно, то струм через них тече однаковий $I=I_R=I_L=I_C$, то ми отримуємо

$$U=I\sqrt{R^2+\left(X_L-X_C\right)^2}$$

Множник у струму називають повним опором Z, таким чином

$$Z=\sqrt{R^2+\left(X_L-X_C\right)^2}$$

Тангенс кута зсуву фаз між амплітудним значенням струму і повним напругою можна знайти за формулою

$$tg\varphi=\frac{U_L-U_C}{U_R}=\frac{X_L-X_C}{R}$$