Кинематика вращательного движения

Рассмотрим обращение материальной точки M по окружности радиуса r (рис.1). В момент времени $t=0$ она находилась в точке A. Радиус-вектор $\vec{r}$, проведенный из начала координат к точке M, за время t повернулся на угол φ. Из рисунка видно, что координаты точки:

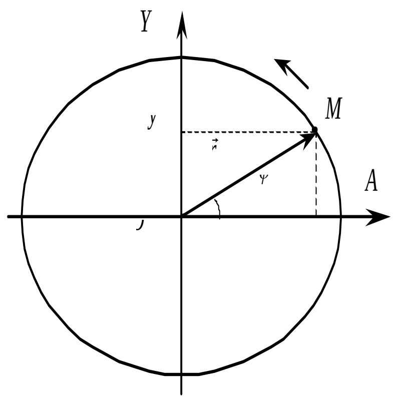


Рис.1

$$x = r \cdot \cos\varphi, \tag{1а}$$

$$y = r \cdot \sin\varphi. \tag{1б}$$

Модуль радиуса-вектора $r = |\vec{r}|$ и угол φ, который он составляет с осью X, называют *полярными координатами* точки, а соотношения (1) дают связь декартовых координат x и y с полярными. В нашем случае $r = const$ и положение точки M на окружности определяется только одной полярной координатой – углом φ.

Угловая скорость ω, с которой вращается радиус-вектор точки, равна производной φ по времени:

$$\omega = \frac{d\varphi}{dt}. \tag{2}$$

Она измеряется в радианах в секунду, а размерность – секунда в минус первой степени

$$[\omega] = 1 / \text{с} = \text{с}^{-1}.$$

(Так происходит, потому что радианы это безразмерные величины, 1 *радиан* – центральный угол, длина стягивающей дуги которого равна радиусу).

Угловое ускорение ε, с которым вращается радиус-вектор, равно производной его угловой скорости по времени:

$$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}. \tag{3}$$

Единица измерения углового ускорения – *радиан в секунду за секунду*, а размерность – секунда в степени минус 2

$$[\varepsilon] = \text{рад} / \text{с}^2 = \text{с}^{-2}.$$

Угол поворота φ можно найти, если известна угловая скорость ω:

$$\varphi(t) = \varphi_0 + \int_0^t \omega\, dt, \tag{4}$$

а угловую скорость ω – по известному угловому ускорению ε:

$$\omega(t) = \omega_0 + \int_0^t \varepsilon\, dt, \qquad (5)$$

где φ_0 и ω_0 – константы интегрирования, равные соответственно углу поворота и угловой скорости в момент времени $t = 0$.

По аналогии с поступательным движением определим *средню угловую скорость* и *среднее угловое ускорение:*

$$\omega_{cp} = \frac{\Delta\varphi}{\Delta t}, \qquad (6)$$

$$\varepsilon_{cp} = \frac{\Delta\omega}{\Delta t}, \qquad (7)$$

где $\Delta\varphi$ и $\Delta\omega$ – соответственно приращение угла φ и угловой скорости ω за промежуток времени Δt.

Обращение точки по окружности является равномерным, если ее скорость изменяется лишь по направлению, оставаясь постоянной по модулю. В этом случае тангенциальная составляющая ускорения $a_\tau = d\upsilon / dt = 0$, а нормальная $a_n = \upsilon^2 / r$. Она называется *центростремительным* ускорением (при этом радиус кривизны траектории r равен радиусу окружности).

Поскольку угловая скорость равномерного вращения радиуса-вектора точки постоянна ($\omega = const$), из формулы (4) следует зависимость угла φ от времени:

$$\varphi = \varphi_0 + \omega t, \qquad (8)$$

где φ_0 – угол поворота в начальный момент времени.

Полагая для простоты $\varphi_0 = 0$, найдем отсюда угловую скорость

$$\omega = \frac{\varphi}{t} \qquad (\text{при } \varepsilon = 0). \qquad (9)$$

Пусть точка, равномерно движущаяся по окружности, за время t совершает N оборотов. Тогда *число оборотов за единицу времени называется частотой* ν *ее обращения по окружности:*

$$\nu = \frac{N}{t}. \qquad (10)$$

Периодом обращения материальной точки T называется время, за которое она совершает один оборот:

$$T = \frac{t}{N}. \qquad (11)$$

Период и частота – взаимно обратные величины:

$$T = \frac{1}{\nu}. \qquad (12)$$

Единица измерения периода $[\ T\ ] = c$, частоты $[\nu] = 1/\text{с}$ (*оборот в секунду*).

Если точка совершила N оборотов, то угол поворота ее радиуса-вектора $\varphi = 2\pi N$, а его угловая скорость $\omega = \varphi / t = 2\pi N / t$. Подставляя сюда N / t из формулы (4.10), получим связь угловой скорости ω с частотой обращения ν и периодом T:

$$\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}. \tag{13}$$

Скорость точки υ при движении ее по окружности принято называть *линейной скоростью*, чтобы отличать ее от угловой скорости ω, которую называют также *круговой частотой*. Совершая N оборотов за время t, материальная точка проходит расстояние $s = 2\pi r \cdot N$ ($2\pi r$ – длина окружности). Тогда ее линейная скорость $\upsilon = s / t$, с учетом уравнений (10) и (13), выражается через угловую скорость:

$$\upsilon = \omega \cdot r. \tag{14}$$

Эта формула справедлива и тогда, когда точка движется по окружности с ускорением. Дифференцируя (14) по времени при условии $r = const$, получим тангенциальное ускорение:

$$a_\tau = \varepsilon \cdot r. \tag{15}$$

Центростремительное ускорение a_n также может быть выражено через угловую скорость:

$$a_n = \upsilon^2 / r = \omega^2 r. \tag{16}$$

Скорость точки $\vec{\upsilon}$, как и радиус-вектор $\vec{r}$, проведенный к ней из центра окружности векторные величины. Ось вращения перпендикулярна обоим этим векторам и имеет определенное направление в пространстве. Чтобы обозначить это направление и связать указанные векторы, вводят понятия *аксиального вектора* и *векторного произведения* векторов.

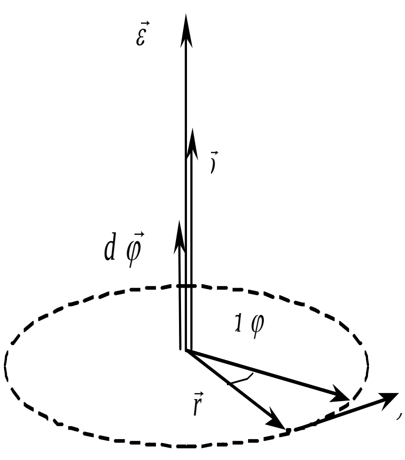


Рис.3

Угловую скорость вращения радиуса-вектора, определенную выше формулой (2), также можно представить в виде аксиального вектора, параллельного вектору $\overrightarrow{d\varphi}$:

$$\vec{\omega} = \frac{\overrightarrow{d\varphi}}{dt}. \tag{17}$$

Динамика вращательного движения

Рассмотрим движение материальной точки по окружности и на этом примере введем новые величины, которые необходимы при описании вращательного движения твердого тела.

Пусть материальная точка массой m начинает движение по окружности радиусом R под действием силы F, которая всегда направлена по касательной к этой окружности. Тогда, по теореме о кинетической энергии, работа этой силы равняется кинетической энергии, которую приобретает материальная точка из состояния покоя:

$$A = F \cdot s = W_{кин} = \frac{m\mathrm{v}^2}{2},$$

где s - путь, который проходит материальная точка по окружности при повороте на угол φ. Перейдем от линейных величин к угловым $s = R\varphi$, $\mathrm{v} = \omega R$.

Получаем

$$F \cdot s = FR \cdot \varphi = \frac{m\mathrm{v}^2}{2} = \frac{mR^2\omega^2}{2}.$$

Напомним, что произведение силы на плечо называется **моментом силы**

$$M = FR,$$

где плечом является длина перпендикуляра проведенного из точки, относительно которой осуществляется вращение до линии действия силы.

Произведение массы материальной точки на квадрат радиуса окружности, по которой осуществляется вращение, называется **моментом инерции** материальной точки:

$$I = mR^2.$$

Обобщая введенные понятия скажем следующее:

1) работа при вращательном движении определяется выражением:
$$A = M \cdot \varphi$$
2) кинетическая энергия при вращательном движении определяется выражением:
$$W_{вр} = \frac{I\omega^2}{2}.$$

Если вращается система из N материальных точек жестко связанных между собой, то кинетическая энергия определяется точно таким же выражением, в котором под моментом инерции понимается следующее

$$I = m_1 {r_1}^2 + m_2 {r_2}^2 + \ldots + m_N {r_N}^2 = \sum_{i=1}^{N} m_i {r_i}^2,$$

где m_i - масса i-ой материальной точки,

r_i - радиус вращения i-ой материальной точки.

Теорема Штейнера

Моменты инерции тел правильной формы могут быть найдены аналитически. Для этого в формуле для момента инерции следует перейти от суммирования к интегрированию по объему тела V:

$$I = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_i^2 = \int_V r^2 dm .$$

Для однородного тела $dm = \rho dV$, где $\rho = m/V$ – его плотность. Тогда

$$I = \rho \int_V r^2 dV .$$

В качестве примера найдем момент инерции однородного тонкого стержня длиной l относительно перпендикулярной к нему оси, проходящей через один из его концов (ось AA' на рис.). Разобьем стержень на малые участки длиной dr. Объем каждого такого участка $dV = S\,dr$, где S – площадь поперечного сечения стержня.

Подставляя элемент объема $dV = S\ dr$ в интеграл получим

$$I = \rho \int_0^l S r^2 dr = \frac{1}{3} \rho S l^3 = \frac{1}{3} m l^2 ,$$

поскольку $\rho S l = \rho V = m$ – масса стержня.

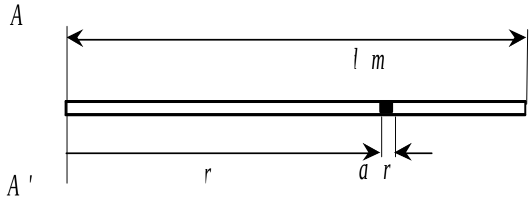


Рис.

Любое тело имеет **три** взаимно перпендикулярные оси, проходящие через центр его масс, вращение вокруг которых не сопровождается давлением на подшипники, крепящие ось. Они называются *свободными осями*. У тела правильной формы эти оси совпадают с осями его симметрии.

Моменты инерции тела относительно свободных осей I_{xx}, I_{yy}, I_{zz} называются *главными моментами инерции,* а сами эти оси – *главными осями инерции*.

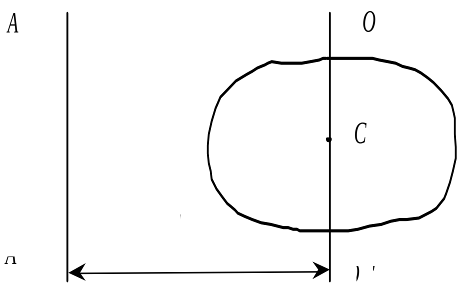


Рис.

При вычислении моментов инерции тел используют *теорему Штейнера: момент инерции I_A тела относительно некоторой оси AA' равен сумме момента инерции тела I_C относительно оси OO', проходящей через центр его масс C параллельно оси AA', и произведения массы тела на квадрат расстояния d между этими осями*:

$$I_A = I_C + md^2 .$$

С помощью теоремы Штейнера найдем момент инерции однородного стержня относительно оси, проходящей через его середину (центр масс). Поскольку в этом случае $d = l/2$, из теоремы Штейнера следует:

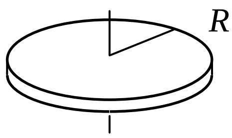
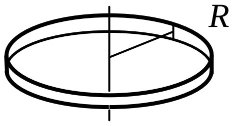
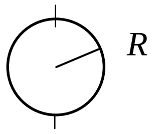
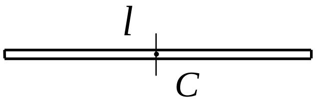
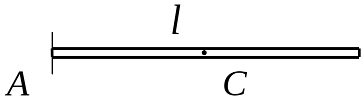
$$I_C = I_A - md^2.$$

Тогда

$$I_C = \frac{1}{3}ml^2 - m\left(\frac{l}{2}\right)^2 = \frac{1}{12}ml^2.$$

В табл. приведены моменты инерции однородных тел простой формы, вычисленные с помощью интегрирования.

Таблица *Моменты инерции некоторых тел*

Тело	*Рисунок*	*Момент инерции*
Цилиндр или диск		$I_{цил} = \frac{1}{2}mR^2$
Обруч		$I_{обр} = mR^2$
Шар		$I_ш = \frac{2}{5}mR^2$
Стержень		$I_C = \frac{1}{12}ml^2$
		$I_A = \frac{1}{3}ml^2$

Момент силы и момент импульса относительно неподвижного центра

Законы механики вращательного движения связаны с понятиями *момента силы и момента импульса*. Следует различать моменты этих векторов относительно точки и относительно оси.

Пусть O – какая-либо точка, которую назовем *центром* или *полюсом вращения*. Обозначим $\vec{r}$ радиус-вектор,

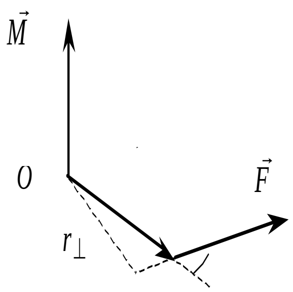


Рис.1

проведенный из этой точки к точке приложения силы $\vec{F}$ (рис.1).

Моментом силы $\vec{F}$ *относительно полюса* O *называется векторное произведение радиуса-вектора* $\vec{r}$ *на силу* $\vec{F}$ *:*

$$\vec{M} = \vec{r} \times \vec{F}.$$

Модуль момента силы

$$M = r F \sin\alpha = r_{\perp} F,$$

где α – угол между векторами $\vec{r}$ и $\vec{F}$, а $r_{\perp} = r \sin\alpha$ – *плечо силы* – длина перпендикуляра, опущенного из полюса O на линию действия силы $\vec{F}$.

Моментом импульса $\vec{L}$ *материальной точки относительно полюса* O *называется векторное произведение радиуса-вектора* $\vec{r}$*, соединяющего полюс с материальной точкой, на вектор ее импульса* $\vec{p}$ *:*

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}.$$

Если траекторией частицы является окружность, то момент ее импульса относительно центра окружности:

$$L = m\upsilon r.$$

Момент импульса частицы, движущейся вдоль прямой линии (рис.2):

$$L = r\, p \sin\alpha = r_{\perp} m\upsilon.$$

Если на частицу не действуют силы, ее скорость не изменяется и момент импульса остается постоянным.

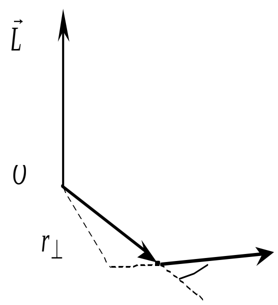


Рис. 2

Уравнение моментов

Рассмотрим вывод формулы уравнения моментов в самом простом случае. Пусть материальная точка движется по окружности радиусом r, тогда ее импульс (также как и скорость) направлен под углом 90° к радиус-вектору $\vec{r}$ и выражение для момента импульса $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ можно написать в скалярном виде

$$L = r\, p.$$

Вычислим производную по времени от этого выражения

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(rp)}{dt} = r\frac{dp}{dt},$$

где мы учли, что при движении по окружности модуль радиус-вектора $\vec{r}$ не изменяется.

Из второго закона Ньютона следует, что

$$F = \frac{dp}{dt},$$

тогда

$$\frac{dL}{dt} = r \cdot F .$$

В данном случае произведение $r \cdot F$ определяет момент силы, действующий на материальную точку, т.е.

$$M = r \cdot F .$$

Окончательно получаем уравнение моментов в скалярном виде

$$\frac{dL}{dt} = M .$$

Проведем данную выкладку в векторном виде.
Продифференцируем выражение $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ по времени:

$$\frac{d\,\vec{L}}{d\,t} = \frac{d\,\vec{r}}{d\,t} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\,\vec{p}}{d\,t} .$$

Производная радиуса-вектора $\vec{r}$ равна скорости материальной точки $d\,\vec{r}\,/\,d\,t = \vec{\upsilon}$, а поскольку векторы $\vec{\upsilon}$ и $\vec{p}$ параллельны друг другу, их векторное произведение обращается в нуль. Во втором слагаемом $d\,\vec{p}\,/\,d\,t = \vec{F}$, а векторное произведение $\vec{r} \times \vec{F}$ образует момент силы $\vec{M}$. Поэтому

$$\frac{d\,\vec{L}}{d\,t} = \vec{M} .$$

Это соотношение называется *уравнением моментов*: *производная по времени момента импульса материальной точки относительно неподвижного центра равна моменту действующей на нее силы относительно того же центра.*