

## Лекція 1 Класична механіка.

*Механіка* – розділ фізики, в якому вивчається механічний рух.

*Механічним рухом* прийнято називати процеси зміни взаємного розташування тіл у просторі і часі відносно інших тіл.

Основна задача механіки полягає у тому, щоб описати механічний рух тіла, а саме – зміну положення тіла у просторі у будь-який момент часу.

- Класична механіка вивчає рух макроскопічних тіл, швидкості яких малі порівняно зі швидкостями світла у вакуумі.

Механіка складається з трьох основних розділів: *кінематика*, *динаміка* і *статика*.

- *Кінематика* – розділ фізики, який вивчає опис руху тіл, без з'ясування причин такого руху.

- *Динаміка* – розділ фізики, який вивчає закони руху тіл і причини, що зумовлюють цей рух.

- *Статика* – розділ фізики, який вивчає закони рівноваги тіла або системи тіл.

Механіка вивчає механічний рух тіл за допомогою ряду моделей, таких як матеріальна точка, абсолютно тверде тіло і т.п.

Простим об'єктом, рух якого вивчає класична механіка, є матеріальна точка. *Матеріальною точкою в механіці називається тіло, розмірами якого в умовах даної задачі можна знехтувати.* Планети, що обертаються навколо Сонця, можна вважати матеріальними точками, оскільки розміри планет, наскільки великі вони б не були, все ж таки дуже малі у порівнянні з їх відстанями до Сонця. Снаряд, випущений з гармати, також може бути прийнятий за матеріальну б точку.

*Абсолютно твердим тілом називають сукупність матеріальних точок, відстані між якими при русі тіла залишаються незмінними.*

*Тіло, відносно якого визначається положення інших тіл, називається тілом відліку.* Як тіло відліку найчастіше використовують Землю, з якою пов'язують прямокутну декартову систему координат (рис. 1.1). Відрізки  $x, y, z$ , що відсікаються на осях координат перпендикулярними до них площинами, що проходять через точку

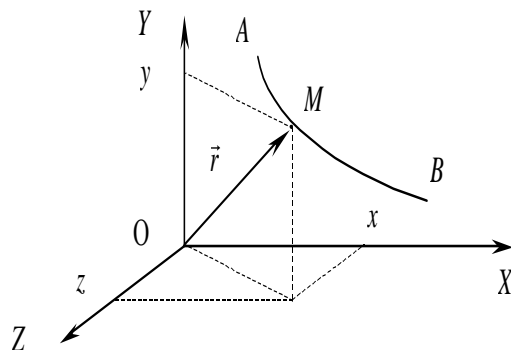


Рис. 1.1

$M$ , називаються *координатами точки  $M$* .

Рух точки повністю описаний, якщо відоме її положення у будь-який момент часу щодо вибраної системи координат. Число незалежних координат, що визначають положення тіла в просторі, називається *числом його ступенів свободи*. Положення матеріальної точки задається трьома координатами, тому вона має *три* ступені свободи. Тверде тіло як протяглий об'єкт має *шість* ступенів свободи – три координати його центру мас і три кути його повороту навколо кожної з координатних осей.

Щоб описати рух матеріальної крапки, необхідно знайти функції:

$$\begin{aligned} x &= x(t), \\ y &= y(t), \\ z &= z(t). \end{aligned} \tag{1.1}$$

*Траєкторією називається сукупність послідовних положень точки, тобто лінія, яку вона описує в просторі при своєму русі* (на рис. 1.1 – це лінія  $AB$ ). Система рівнянь (1.1) задає траєкторію точки в параметричному вигляді, де як параметр виступає час  $t$ .

*Задача механіки полягає у знаходженні функцій (1.1)*. Для формулювання законів, за допомогою яких можуть бути знайдені ці функції, потрібно ввести поняття *швидкості, прискорення, маси, імпульсу і сили*. У кінематиці вводяться поняття швидкості і прискорення. Визначимо їх спочатку для точки, що рухається уздовж однієї з координатних осей, коли її положення в просторі характеризується однією координатою, а потім узагальнимо на випадок трьох координат.

## § 1.2. Одновимірний рух

Розглянемо рух матеріальної точки вздовж прямої лінії, яку виберемо як координатну вісь  $X$  (мал. 1.2). Координатою  $x$  точки  $M$  називається її відстань від початку координат (точки  $O$ ). Залежність координати від часу виражається функцією  $x = x(t)$ .

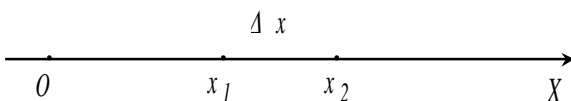


Рис. 1.2

Нехай у момент часу  $t$  матеріальна точка мала координату  $x_1 = x(t)$ , а через проміжок часу  $\Delta t$  – координату  $x_2 = x(t + \Delta t)$ , так що

їх різниця

$$\Delta x = x_2 - x_1$$

є шлях, який вона пройшла за час  $\Delta t$ . Відношення пройденого шляху до часу

$$v_{cp} \stackrel{def}{=} \frac{\Delta x}{\Delta t} \quad (1.2)$$

називається *середньою швидкістю* матеріальної крапки за час  $\Delta t$ . (Значок *def* тут і усюди надалі указує на те, що дана величина вводиться “за визначенням”. По-англійськи "definition" – визначення).

Спрямуємо  $\Delta t$  до нуля. Відношення  $\Delta x / \Delta t$  спрямовується до межі, званої *миттєвою швидкістю* матеріальної точки:

$$v \stackrel{def}{=} \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta x}{\Delta t} = \frac{d x}{d t} = x'(t). \quad (1.3)$$

Миттєва швидкість точки дорівнює похідній  $x'(t)$  її координати. Вона показує швидкість зміни координати в даний момент часу. Швидкість в системі СІ вимірюється в *метрах за секунду*:  $[v] = \text{м/с}$ .

Похідна швидкості  $v(t)$  за часом називається *прискоренням* матеріальної точки:

$$a \stackrel{def}{=} \frac{d v}{d t} = v'(t) = x''(t). \quad (1.5)$$

Прискорення показує швидкість зміни швидкості точки в даний момент часу і вимірюється в *метрах в секунду за секунду*:

$$[a] = \text{м} / \text{с}^2.$$

Приклад 1. Матеріальна точка рухається з постійним прискоренням  $a = \text{const}$  (рівноприскорений рух). Знайти залежність координати точки від часу за умови, що в початковий момент часу її координата  $x(0) = x_0$ , а швидкість  $v(0) = v_0$ .

Рішення. Щоб знайти залежність  $x = x(t)$ , скористаємося рівнянням (1.4). Невідому функцію  $v(t)$  знайдемо по формулі (1.6). Тоді при  $a = \text{const}$  маємо

$$(1) \quad v(t) = v_0 + \int_0^t a(t) dt = v_0 + a t.$$

Підставляючи в рівняння (1.4), одержимо розшукуєму залежність:

$$(2) \quad x(t) = x_0 + \int_0^t (v_0 + at) dt = x_0 + v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

Оскільки  $s = x - x_0$  – пройдений шлях, вона набуває вигляду

$$(3) \quad s(t) = v_0 t + \frac{at^2}{2}.$$

При рівноприскореному русі ( $a = \text{const}$ ) середнє значення швидкості, згідно (1) і (3):

$$v_{cp} = \frac{s}{t} = v_0 + \frac{at}{2} = \frac{v_0 + (v_0 + at)}{2} = \frac{v_0 + v}{2}.$$

Розглядаючи це рівняння спільно з рівнянням (1)  $v - v_0 = at$  і виключивши  $t$ , одержимо формулу, що зв'язує кінцеву і початкову швидкості руху, прискорення і пройдений шлях:

$$(4) \quad v^2 - v_0^2 = 2as.$$

Рівняння (1), (3) і (4) відомі з шкільного курсу фізики.

### § 1.3. Швидкість і прискорення матеріальної точки при русі вздовж криволінійної траєкторії

Положення якої-небудь точки в просторі можна визначити вектором  $\overrightarrow{OM}$ , проведеним з початку декартової системи координат в цю точку (див. рис. 1.1). Вектор  $\overrightarrow{OM}$  називається радіусом-вектором точки  $M$  і позначається  $\vec{r}$ :

$$\vec{r} = x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}. \quad (1.12)$$

Нехай частинка рухається вздовж плоскої кривої, зображеної на рис. 1.10,а. Її положення в момент часу  $t$  визначається радіусом-вектором  $\vec{r}(t)$ , а в момент часу  $t + \Delta t$  – радіусом-вектором  $\vec{r}_1 = \vec{r}(t + \Delta t)$ . Приріст радіус-вектора

$$\Delta \vec{r} = \vec{r}_1 - \vec{r} \quad (1.13)$$

( $t$ ) називається *переміщенням* частинки за час  $\Delta t$ . Межа відношення переміщення  $\Delta \vec{r}$  до  $\Delta t$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  називається *миттєвою швидкістю* частинки у момент часу  $t$ :

$$\vec{v} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{r}}{\Delta t} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \vec{r}'(t). \quad (1.14)$$

Вектор  $\vec{v}$  спрямований по дотичній до траєкторії в кожній її точці.

Нехай у момент  $t$  частинка знаходилася в точці  $M$ , а через час  $\Delta t$  – у точці  $M_1$  (див. рис. 1.10,а). Швидкість в точці  $M$  позначимо вектором  $\vec{v}$ , а в точці  $M_1$  – вектором  $\vec{v}_1$ . Приріст швидкості за час  $\Delta t$  (рис. 1.10,б):

$$\Delta \vec{v} = \vec{v}_1 - \vec{v}$$

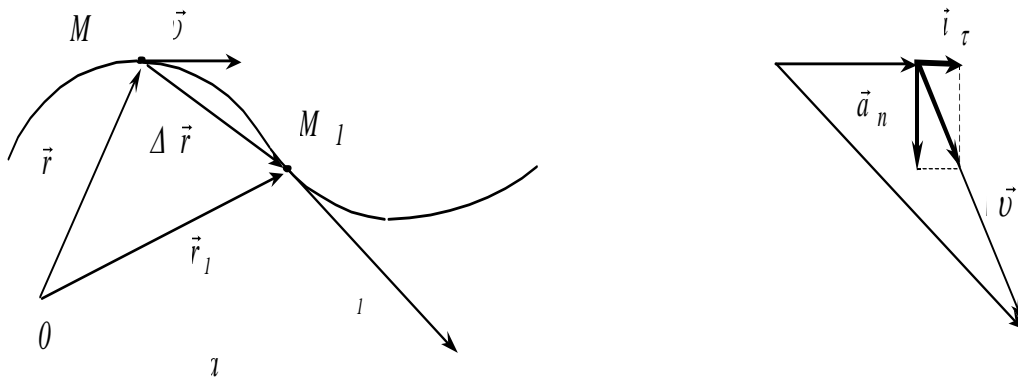


Рис. 1.10

Межа відношення  $\Delta \vec{v}$  до  $\Delta t$  при  $\Delta t \rightarrow 0$  називається *прискоренням* частинки:

$$\vec{a} = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{v}}{\Delta t} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{v}'(t). \quad (1.15)$$

Вектор прискорення  $\vec{a}$  паралельний вектору  $\Delta \vec{v}$ . Розкладемо вектор  $\vec{a}$  (див. рис. 1.10,б) на дві компоненти:  $\vec{a}_\tau$ , паралельну вектору  $\vec{v}$ , і  $\vec{a}_n$  – перпендикулярну йому:

$$\vec{a} = \vec{a}_\tau + \vec{a}_n.$$

Компоненту  $\vec{a}_\tau$  називається *тангенціальним прискоренням* частинки і показує швидкість зміни модуля її швидкості  $v$ :

$$a_{\tau} = \frac{dv}{dt}, \quad v = |\vec{v}|. \quad (1.16)$$

Компонента  $\vec{a}_n$  показує зміну швидкості частинки по напрямку і називається *нормальним прискоренням*, тобто спрямованим по нормалі до вектора швидкості  $\vec{v}$ . Можна показати, що нормальне прискорення:

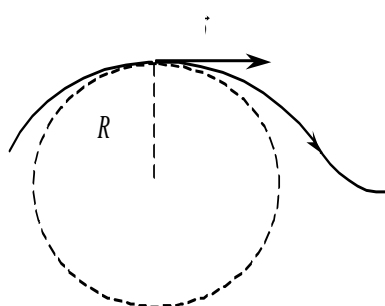


Рис. 1.11

$$a_n = \frac{v^2}{R}, \quad (1.17)$$

де  $R$  – *радіус кривизни* траєкторії в якій-небудь її точці,  $v$  – швидкість частинки в цій точці.

*Радіус кривизни  $R$  дорівнює радіусу кола, дотичного до траєкторії в даній точці* (рис. 1.11).

Оскільки радіус такого кола змінюється при переході від однієї точки до іншої, він називається *миттєвим радіусом кривизни* траєкторії.

## 2. Динаміка.

В основі динаміки лежать три закони Ньютона, які були одержані в результаті узагальнення великої кількості експериментальних фактів. До основних характеристик динаміки поступального руху відносяться маса  $m$ , імпульс  $\vec{p}$  і сила  $\vec{F}$ .

*Маса* – це фізична величина, яка є мірою інертності тіл. Вона визначається порівнянням з еталонною масою. Ця маса називається *інертною масою*.

Сила, з якою тіло притягається до Землі, пропорційна його *гравітаційній масі*  $m_g$ . Інертну і гравітаційну маси прийнято вважати рівними, тому на практиці масу тіла визначають зважуванням на важільних вагах, на одній з чашок яких знаходиться тіло встановленої маси.

### Основні властивості маси в класичній механіки:

1. *Маса тіла* є постійною величиною, яка не залежить ні від положення, яке займає тіло в просторі, ні від її швидкості, ні від дії на дане тіло інших тіл;
2. *Маса* є «адитивною» величиною, тобто маса тіла, яка складається з кількох частин, дорівнює сумі мас всіх його частин

$$m = \sum_{i=1}^N m_s. \quad (2.1.1)$$

Зазначимо, що ці властивості маси справедливі лише при русі тіл зі швидкостями, які менші, ніж швидкості світла у вакуумі.

Одиниця вимірювання маси в системі SI – кілограм:

$$[m] = \text{кг}.$$

*Імпульсом точки* називається векторна фізична величина, яка дорівнює добутку маси точки на вектор її швидкості:

$$\vec{p} = m\vec{v}. \quad (2.1.2)$$

Основні властивості імпульсу:

1. Напрямок імпульсу тіла співпадає з напрямком швидкості тіла;
2. Імпульс – є мірою поступального руху, тобто характеризує його кількість.

Одиниця вимірювання імпульсу в системі SI:

$$[p] = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}.$$

*Сила* – це векторна фізична величина, що є мірою механічної дії на тіло з боку інших тіл або полів, в результаті якої тіло одержує прискорення або деформується.

Основні властивості сили:

1. Сила визначається числовою величиною (модулем)  $|\vec{F}| = \bar{F}$ , напрямком у просторі та точкою прикладання;
2. Виконується принцип суперпозиції: *Результуюча сила, що діє на тіло дорівнює векторній сумі сил, з якими кожне з оточуючих тіл діє на це тіло за відсутності дії на нього інших тіл* (рис.2.1.1).

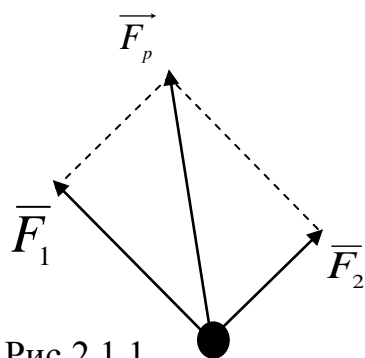


Рис.2.1.1

3. Якщо на тіло діє  $N$  сил, то їх сумарна дія еквівалентна дії однієї рівнодійної сили, яка є геометричною (векторною) сумою цих сил:

$$\vec{F} = \sum_{i=1}^N \vec{F}_i.$$

Одиниці вимірювання сили в системі SI – Ньютон:

$$[F] = \text{Н} = \text{кг} \cdot \text{м} / \text{с}^2.$$

## 2.2. Закони Ньютона. Інерційна система відліку

Закони Ньютона виконуються в інерціальних *системах відліку*. Система відліку, в якій будь яка вільна матеріальна точка зберігає стан спокою або прямолінійного рівномірного руху, називається *інерціальною*.

В якості першого закону руху Ньютон прийняв *закон інерції*, відкритий ще Г. Галілеєм: *Будь яке тіло перебуває в стані спокою або рівномірного прямолінійного руху, поки вплив з боку інших тіл не змусить його змінити цей стан.*

Властивість тіла зберігати стан спокою, або рівномірного прямолінійного руху за відсутності дії на нього інших тіл називається *інерцією*, а перший закон - *законом інерції*.

*Перший закон Ньютона: Якщо на тіло не діють сили або сума цих сил дорівнює нулю, то тіло перебуває в стані спокою або рухається з постійною швидкістю:*

$$\vec{a} = 0, \text{ якщо } \vec{F}_{\text{рез}} = 0. \quad (2.2.1)$$

Перший закон Ньютона постулює існування інерціальних систем відліку: *«Існують такі системи відліку, в яких матеріальна точка зберігає свою швидкість сталою, якщо на нього не діють інші тіла, або дія інших тіл скомпенсована».*

Основним законом динаміки поступального руху є другий закон Ньютона. У загальному формулюванні він читається так: *Швидкість зміни імпульсу тіла в часі дорівнює результуючій прикладених до тіла сил.*

Другий закон Ньютона (в імпульсній формі):

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \vec{F}_{\text{рез}}. \quad (2.2.2)$$

Для тіла постійної маси швидкість зміни імпульсу збігається з добутком маси на прискорення

$$m\vec{a} = \vec{F}. \quad (2.2.3)$$

Це рівняння називається *динамічним рівнянням руху* точки з постійною масою, або аналітичним записом другого закону Ньютона.

$$\vec{a} = \frac{\vec{F}}{m}. \quad (2.2.4)$$

Якщо на тіло діють кілька сил, то у другий закон Ньютона входить рівнодійна цих сил.

В найпростішій формі другий закон прийнято формулювати так:



В інерціальній системі відліку вектор прискорення тіла прямо пропорційний векторній сумі діючих на нього сил і обернено пропорційний масі тіла:

$$\vec{a} = \frac{\sum_{i=1}^N \vec{F}_i}{m}. \quad (2.2.5)$$

**Третій закон Ньютона:** Дві матеріальні точки взаємодіють силами, рівними за величиною, та спрямованими в протилежні сторони вздовж прямої, що з'єднує ці точки.

$$\vec{F}_{12} = -\vec{F}_{21} \quad (2.2.6)$$

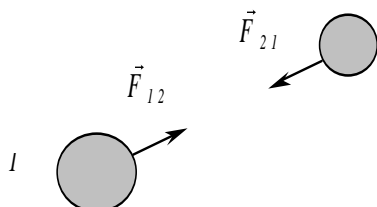


Рис.2.2.1.

Зазначимо, що ці сили діють вздовж прямої, яка проходить через центр мас тіл. Це означає, що при взаємодії тіл сили завжди виникають парами і є силами однієї природи. Узагальнюючи зазначене можна записати, що закони Ньютона не

виводяться з будь-яких загальних принципів. Критерієм їх справедливості служить досвід.

Розрахунки, що ґрунтуються на законах Ньютона, узгоджуються з експериментом. Однак ці закони мають межі застосування:

1. Механіка Ньютона є механікою макроскопічних тіл, розміри і маси яких багато більше розмірів і мас атомів;
2. Тіла повинні рухатися зі швидкостями набагато меншими швидкості поширення світла у вакуумі;
3. Закони Ньютона справедливі тільки в інерціальних системах відліку.

### 2.3. Основні сили в механіці

Основні сили, які розглядаються в класичній механіці - це гравітаційні сили та сили електромагнітної природи, зокрема сили пружності і тертя.

- *Сила гравітаційної взаємодії* – це сила, що діє між двома матеріальними тілами та обумовлена їх гравітаційною взаємодією:

$$F = G \frac{m_1 m_2}{r^2}, \quad (2.3.1)$$

де  $m_1$  і  $m_2$  – маси взаємодіючих тіл;  $r$  – відстань між матеріальними точками або тілами,  $G = 6,67 \cdot 10^{-11} \frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$  – гравітаційна стала.

Застосовуючи закон всесвітнього тяжіння до випадку взаємодії Землі з тілом масою  $m$ , розташованим поблизу земної поверхні на висоті  $h$ , отримуємо:

$$F = G \frac{M_3 m_2}{(R_3 + h)^2}, \quad (2.3.2)$$

де  $M_3$  – маса Землі,  $R_3$  – радіус Землі.

- *Сила тяжіння* – це сила, яка діє на тіло з боку Землі:

$$F_T = mg, \quad (2.3.3)$$

де  $g = 9,8 \frac{\text{м}}{\text{с}^2}$  – прискорення вільного падіння.

Прискорення вільного падіння тіла  $g$  залежить від його висоти над земною поверхнею:

$$g = G \frac{M_3}{(R_3 + h)^2}. \quad (2.3.4)$$

- *Вага тіла* – це сила, з якою тіло внаслідок тяжіння до Землі діє на опору або підвіс

$$\vec{P} = m\vec{g}. \quad (2.3.5)$$

Якщо опора (підвіс) рухається з прискоренням, тоді вага тіла буде залежить від прискорення тіла та напрямку руху тіла з опорою:

$$\vec{P} = m(\vec{g} \pm \vec{a}). \quad (2.3.6)$$

Відповідно до третього закону Ньютона одночасно виникають дві рівні за модулем і протилежні за напрямком сили. Силу  $\vec{N}$ , з якою опора діє на тіло, називають силою *нормальної реакції опори*. Для тіла, що лежить на нерухомій горизонтальній поверхні, вага і сила реакції опори рівні по модулю силі тяжіння  $\vec{F}_T$ .

- *Сила пружності* - це сила, що виникає при деформації тіла, тобто при зміні його форми або об'єму, обумовленому дією зовнішніх сил.

Для пружних деформацій справедливий закон Гука: *сила*

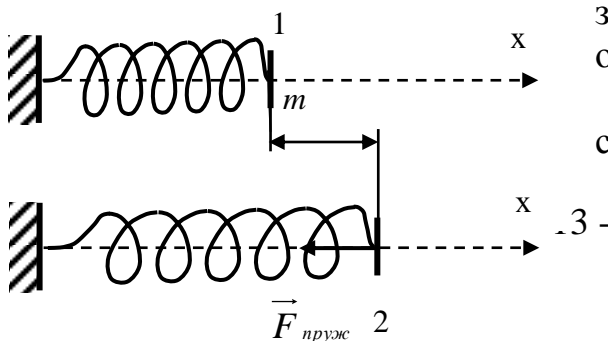


Рис.2.4.1

пружності, що виникає при деформації стискання або розтягу, пропорційна величині деформації

$$F_{\text{пр}} = -kx, \quad (2.3.7)$$

де  $k$  – коефіцієнт пружності,  $x$  – абсолютна деформація.

• Сили тертя з'являються при переміщенні тіл, що стикаються, або їх частин одна відносно одної.

$$F_{\text{тр}} = \mu N, \quad (2.3.8)$$

де  $\mu$  – коефіцієнт тертя,  $N$  – сила нормального тиску.

Сили тертя спрямовані по дотичній до поверхонь, що труться, причому так, що вони протидіють відносному зміщенню цих поверхонь. Тертя, що виникає при відносному переміщенні двох дотичних тіл, називається *зовнішнім*; тертя між частинами одного і того ж тіла називається *внутрішнім*.

## 2.4. Закон збереження імпульсу

Із законів Ньютона випливає закон збереження імпульсу для замкнутої системи тіл.

*Замкнутою називають систему тіл, на які не діють зовнішні сили.* Тіла системи можуть взаємодіяти тільки між собою.

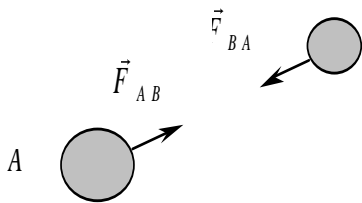


Рис.2.4.1

Розглянемо замкнуту систему, що складається з двох тіл  $A$  і  $B$  (рис. 2.4.1).

Згідно з третім законом Ньютона, сили їх взаємодії

$$\vec{F}_{A,B} = -\vec{F}_{B,A}$$

за другим законом Ньютона  $\vec{F}_{A,B} = \frac{d\vec{p}_A}{dt}$ ,

$\vec{F}_{B,A} = \frac{d\vec{p}_B}{dt}$ , тому  $\frac{d\vec{p}_A}{dt} = -\frac{d\vec{p}_B}{dt}$ , тобто

$$\frac{d(\vec{p}_A + \vec{p}_B)}{dt} = 0, \text{ звідки слідує, що } \vec{p}_A + \vec{p}_B = \text{const}.$$

Для системи  $N$  тіл:

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_i = \text{const}. \quad (2.4.1)$$

Це рівняння виражає *закон збереження імпульсу*: сумарний імпульс замкнутої системи тіл не змінюється з часом. Векторне рівняння

(2.4.1) розпадається на три незалежних рівняння для компонент імпульсу по осях координат:

$$\sum_{i=1}^N \vec{p}_{xi} = const, \sum_{i=1}^N \vec{p}_{yi} = const, \sum_{i=1}^N \vec{p}_{zi} = const. \quad (2.4.2)$$

Якщо уздовж будь-якого напрямку на систему тіл не діють зовнішні сили, то проекція її сумарного імпульсу на цей напрямок залишається постійною. Це дозволяє використовувати закон збереження імпульсу при вирішенні задач механіки.

Як показує досвід, закон збереження імпульсу виконується при будь-яких взаємодіях тіл всередині замкнутої системи. Закон збереження імпульсу є одним з фундаментальних законів фізики.