Лекція2
Робота постійної сили.

Робота – є кількісною характеристикою процесу обміну енергією між тілами, що взаємодіють. Зміна механічного руху тіла пов'язана з силами, які діють на тіло з боку інших тіл. Тому у механіці роботу вимірюють добутком сили, що діє на тіло в напрямку його переміщення, на модуль цього переміщення.

Розглянемо тіло, що рухається прямолінійно з постійною силою ($\vec{F} = const$) та під дією сили здійснює переміщення S (рис.3.1.1).

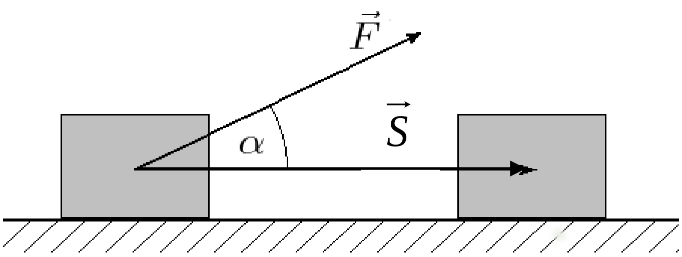


Рис.3.1.1

Механічною роботою даної сили $\vec{F}$ на деякому переміщенні S називається добуток модуля сили на переміщення точки її прикладення і на косинус кута α між напрямком сили і напрямком переміщення: $A = F \cdot S\cos\alpha$. (3.1.1)

Праву частину формули (4.1.1) можна записати у вигляді *скалярного добутку* вектора сили $\vec{F}$ і вектора переміщення $\vec{S}$:

$$A = (\vec{F},\vec{S}). \qquad (3.1.2)$$

У залежності від величини кута α механічна робота може бути додатною ($\alpha < \frac{\pi}{2}$), від'ємною (при $\alpha > \frac{\pi}{2}$) та дорівнювати нулю $\alpha = \frac{\pi}{2}$.

Одиниця вимірювання роботи у системі SI – Джоуль:

$$[A] = Дж.$$

Приклад:

Розглянемо тіло масою m, що рухається вертикально вниз з точки B на висоті h. В точці A він доторкається Землі. Яку роботу здійснює сила тяжіння за час польоту каменя?

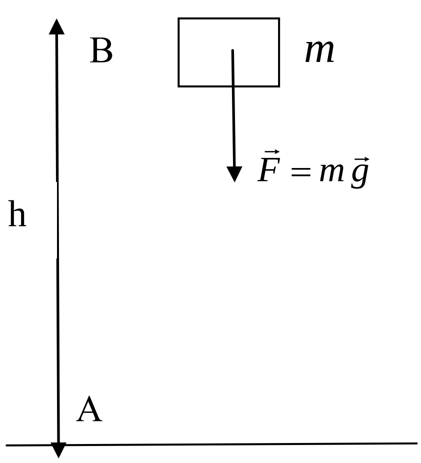


Рис.3.1.2

Розв'язок:

Так як сила тяжіння постійна і дорівнює $\vec{F} = m\vec{g}$, то її роботу знайдемо, обчисливши скалярний добуток $(\vec{F},\vec{s})$. Врахуємо, що рух вертикальний і $\alpha = 0$, тобто $\cos\alpha = 1$ тоді отримаємо:

$$A_{12} = (\vec{F},\vec{s}) = mg \cdot s \cdot \cos\alpha = mg \cdot h, \qquad (3.1.3)$$

Робота сили тяжіння завжди дорівнює mgh і не залежить від траєкторії руху.

2.6 Робота змінної сили.

Якщо траєкторія рухомого тіла не є прямою, а діюча на нього сила не постійна ($\vec{F} \neq const$), то для обчислення роботи розіб'ємо весь шлях від точки 1 до точки 2 на прямолінійні відрізки $d\,\vec{s}_i$ досить малої довжини, щоб силу на цих відрізках можна було вважати постійною (рис.3.2.1).

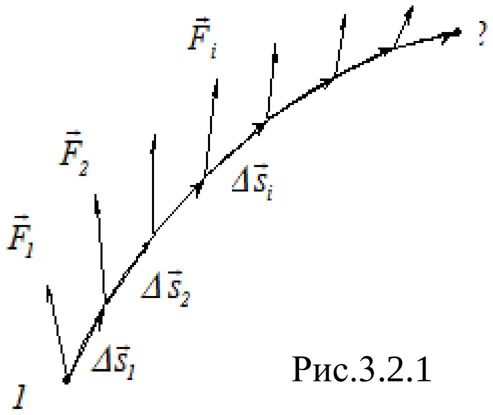


Рис.3.2.1

Робота змінної сили на всьому шляху (*1-2*), буде дорівнювати суми робіт на кожному з відрізків:

$$dA_{12} = \sum_{i=1}^{n} dA_i = \sum_{i=1}^{n} \left(\vec{F}_i, d\vec{S} \right)$$

Суму можна замінити інтегруванням

$$A_{12} = \int_1^2 (\vec{F}, d\vec{S}) = \int_1^2 F_s dS \,.$$

Це інтеграл векторної функції вздовж траєкторії руху від точки 1 до точки 2. Такий інтеграл називається криволінійним. Часто криву 1-2 позначають через L_{12}, вздовж якої рухається тіло, тоді формула (3.2.1) має вигляд:

$$A_{12} = \int_{L_{1,2}} (\vec{F}, d\vec{S}) \qquad (3.2.3)$$

Для обчислення цього інтегралу необхідно знати залежність F від S. Якщо залежність F від S представлена графічно, то робота A визначається заштрихованою на графіку площею кривой $F_s\,(S)$ рис.3.2.2.

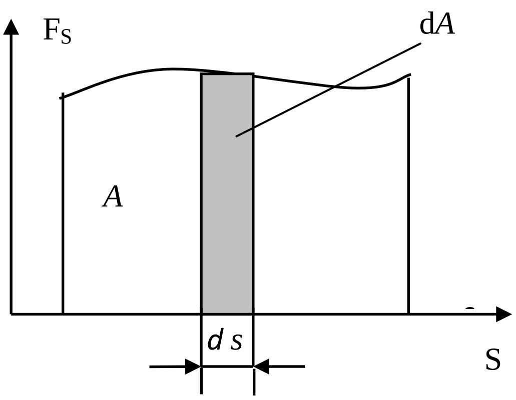


Рис. 3.2.2.

Приклад:

Нехай тіло масою m переміщується з точки 1 у точку 2 під дією сили пружності:

$$F = -kx.$$

Робота сили пружності при переміщенні тіла з точки 1 в точку 2 визначається за формулою:

$$A = \int_1^2 \left(F_{пруж,} dx \right) = \int_1^2 \left(-kx, dx \right) = -\frac{kx_2^2}{2} + \frac{kx_1^2}{2} \qquad (3.2.4)$$

Для характеристики швидкості виконання роботи, вводиться поняття потужності.

Середньою потужністю називають фізичну величину, що дорівнює відношенню роботи до проміжку часу, за який вона виконується:

$$N = \frac{\Delta A}{\Delta t} \qquad (3.2.5)$$

Якщо за час dt сила здійснюється роботу $(\vec{F}, d\vec{S})$, тоді *миттєва механічна потужність*, яку розвиває ця сила в даний момент часу (при $\mathrm{v} = const$) буде дорівнювати

$$N = \frac{\left(\vec{F}, d\vec{S}\right)}{dt} = \left(\vec{F}, \vec{\mathrm{v}}\right), \qquad (3.2.6)$$

Одиниця потужності в системі SI -Ват.

$$[N] = \frac{\text{Дж}}{\text{с}} = \text{Вт} .$$

2.7 Кінетична енергія при поступальному русі. Теорема о зв'язку роботи і енергії.

Енергія є універсальною мірою різних форм руху та взаємодії матеріальних тіл. Різним формам руху відповідають різні форми енергії: механічна, теплова, електромагнітна та інші. Енергію вимірюють роботою, яку може зробити тіло.

В механіці розглядається два виду енергії: кінетична і потенціальна.

Кінетична енергія - це енергія, яку має матеріальна точка внаслідок механічного руху і визначається роботою, яку необхідно виконати, щоб викликати цей рух.

$$dE_к = \delta A \qquad (3.3.1)$$

Кінетична енергія *дорівнює половині добутку маси тіла на квадрат його швидкості:*

$$W_к = \frac{m\mathrm{v}^2}{2}. \qquad (3.3.2)$$

Покажемо, як пов'язані між собою робота і кінетична енергія. Згідно співвідношенню (3.2.2), робота результуючої сили:

$$A_{1,2} = \int_1^2 \left(\vec{F}, d\vec{S}\right), \qquad (3.3.3)$$

оскільки, за другим законом Ньютона:

$$\vec{F} = m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt} \text{ і } d\vec{S} = \vec{\mathrm{v}}dt \text{, тоді}$$

$$A_{1,2} = \int_1^2 \left(m\frac{d\vec{\mathrm{v}}}{dt}, \vec{\mathrm{v}}dt \right) = m\int_1^2 \left(\vec{\mathrm{v}}, d\vec{\mathrm{v}}\right) = \frac{mv_2^2}{2} - \frac{mv_1^2}{2} \qquad (3.3.4)$$

Порівнявши вираз (3.3.4) і (3.3.2) одержимо вираз для теореми для зв’язку роботи і енергії: *Робота результуючої всіх сил, що діють на тіло, йде на прирощення кінетичної енергії тіла*:

$$A_{12} = E_{к2} - E_{к1} \ , \qquad (3.3.5)$$

де $E_{к1}$ и $E_{к2}$ кінетична енергія тіла відповідно у початковій і кінцевій точках шляху.

Одиниця вимірювання кінетичної енергії в SI - Джоуль - збігається з одиницею вимірювання роботи.

$$\left[E_к\right] = Дж.$$

2.8. Потенціальна енергія. Консервативні та неконсервативні сили.

Потенціальна енергія – це механічна енергія системи тіл, що визначається взаємним розташуванням тіл і характером сил взаємодії між ними.

Якщо взаємодія здійснюється за допомогою силових полів (пружних сил, гравітаційних сил), то робота цих сил не залежить від траєкторії руху, а залежить тільки від початкового та кінцевого положення тіла. Ці поля *називаються потенціальними,* а сили консервативними.

Консервативна сила - це сила робота якої, не залежить від форми траєкторії його руху, а визначається тільки координатами початку і кінця шляху.

Вище було показано (див. приклад 3.1.2), що при переміщенні тіла робота сили тяжіння, визначається тільки висотою над рівнем Землі початкової і кінцевої точок його шляху і не залежить від форми траєкторії. Крім сили тяжіння цією же властивістю володіють і інші фундаментальні сили природи - наприклад сила пружності, гравітаційна сила, а також сила електростатичної взаємодії між зарядами.

Можна зазначити, що потенціальна енергія тіла визначається роботою, яку необхідно виконати для переміщення його з положення, де потенціальна енергія дорівнює нулю, в дане положення.

$$W_p = A_{1,0} \qquad (3.4.1)$$

Робота консервативних сил при переміщенні тіла з однієї точки простору в іншу дорівнює зменшенню його потенційної енергії:

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = -\Delta W_p. \qquad (3.4.2)$$

Робота консервативної сили при переміщенні по замкненій траєкторії завжди дорівнює нулю $A_{1,2} = 0$

Роботу консервативних сил можна виразити і через зміну кінетичної енергії тіла. По теоремі про зв'язок роботи і енергії (4.3.5) ця робота дорівнює приросту кінетичної енергії тіла, тобто $A_{12} = W_{к2} - W_{к1}$. Узагальнюючи зазначене, отримуємо, що потенційна енергія, може бути перетворена в роботу, кінетичну енергію або інші види енергії, наприклад у внутрішню (теплову) енергію.

2.9. Види потенціальної енергії.

Потенціальна енергія в однорідному силовому полі. Поле називається однорідним, якщо сила, що діє на тіло однакова у всіх точках поля.

Якщо тіла масою m, що знаходиться в однорідному полі сили тяжіння біля Землі, то потенціальна енергія однорідному силовому полі буде дорівнювати:

$$W_p = mgh, \tag{3.5.1}$$

де g - прискорення вільного падіння, h - висота тіла над поверхнею Землі.

1. *Потенціальна енергія пружно деформованого тіла.*

$$W_p = \frac{k\Delta x^2}{2}, \tag{3.5.2}$$

де k – коефіцієнт жорсткості; Δx – абсолютна деформація.

2. *Потенціальна енергія гравітаційного поля, яке створене точковою масою:*

$$W_p = -G\frac{m_1 m_2}{r}. \tag{3.5.3}$$

де m_1 і m_2 – маси взаємодіючих тіл; r – відстань між матеріальними точками або тілами, $G = 6{,}67 \cdot 10^{-11}\frac{\text{Н} \cdot \text{м}^2}{\text{кг}^2}$ – гравітаційна стала.

Сили, робота яких залежить від форми траєкторії, за якої рухалось тіло, називаються *неконсервативними*.

До неконсервативних сил відносяться сили тертя і сила Коріоліса, яка виникає в обертових системах відліку. Робота сил тертя завжди негативна.

2.10 Закон збереження енергії в механіці.

Згідно з теореми о зв'язку роботи і енергії, робота, що здійснюється рухомим тілом при зміні швидкості тіла, визначається зміною кінетичною енергії даного тіла $A_{12} = W_{к2} - W_{к1}$

З іншого боку, робота дорівнює зміні потенціальної енергії тіла, взятому із протилежним знаком: $A_{12} = W_{p1} - W_{p2}$.

З цих рівнянь отримуємо

$$A_{12} = W_{p1} - W_{p2} = W_{к2} - W_{к1}, \tag{3.6.1}$$

звідки слідує, що

$$W_{к1} + W_{p1} = W_{к2} + W_{p2}. \tag{3.6.2}$$

Сума кінетичної і потенціальної енергії тіла називається його *повною механічною енергією*:

$$W = W_к + W_p. \tag{3.6.3}$$

Рівняння (3.6.2) виражає закон збереження енергії в механіці:

$$W = W_к + W_p = const. \tag{3.6.4}$$

Закон збереження повної механічної енергії: *Якщо на тіло діють тільки консервативні сили, то його повна механічна енергія залишається* *постійною: можуть відбуватися лише перетворення потенційної енергії в кінетичну і назад, але повний запас енергії тіла не змінюється.*

Замкнутою системою називається сукупність тіл, на які не діють зовнішні сили. Якщо між тілами такої системи діють тільки консервативні сили, то вона називається консервативною. Повна механічна енергія замкнутої консервативної системи тіл зберігається в часі.

Якщо ж у замкнутій системі, крім консервативних, діють також неконсервативні сили, наприклад, сили тертя, то повна механічна енергія системи не зберігається.

Як випливає з рівняння (3.6.4), при переході тіла з положення в положення частину його потенційної енергії піде на здійснення роботи з подолання сили тертя:

$$W_{p1} - W_{p2} = W_{к2} - W_{к1} + \left| A_{тр} \right|, \tag{3.6.5}$$

або

$$W_{к2} + W_{p2} = W_{к1} + W_{p1} - \left| A_{тр} \right| \tag{3.6.6}$$

Тобто, повна механічна енергія тіла зменшується на величину цієї роботи, яка перетворюється в тепло:

$$W_1 - W_2 = \left| A_{тр} \right| . \tag{3.6.7}$$

Це пояснюється тим, що сили тертя здійснюють завжди від'ємну роботу – механічна енергія перетворюються у внутрішню. Отже, наявність сил тертя в замкнутій системі приводить до зменшення її повної механічної енергії. Але в цьому випадку виконується загальний закон збереження енергії: *в ізольованій від будь-яких зовнішніх впливів системі залишається постійною сума всіх видів енергії.*

2.11 Абсолютно непружний удар.

Удар – це зіткнення двох або більше тіл, коли взаємодія продовжується дуже короткий час. При ударі в тілах виникають такі значні внутрішні сили, що зовнішніми силами, які діють на них, можна знехтувати. Це дозволяє розглядати ці тіла як замкнуту систему і застосовувати до неї закони збереження.

Удар називається *центральним*, якщо тіла до удару рухаються вздовж прямої, що проходить через їх центри мас.

Абсолютно не пружний удар – це удар після якого швидкості обох тіл що зіштовхуються виявляються однаковими.

Щоб це стало можливим, тіла що зіштовхуються повинні володіти такими властивостями, так як сили, що виникають при їх деформації, залежать не від величини деформації, а від швидкості зміни деформації. Такі властивості притаманні, наприклад, м'якій глині, пластиліну. При не пружному зіткненні відбувається наступне. У початковий момент удару швидкість деформації велика (кулі стискаються), тому виникають значні сили, що надають обом кулях прискорення, яке спрямоване в протилежні сторони. По мірі розвитку удару швидкості деформації куль зменшуються, а самі деформації збільшуються до тих пір, поки швидкості куль виявляться рівними. У цей момент деформації куль перестануть змінюватися, зникнуть сили, і обидві кулі будуть рухатися з однаковою швидкістю. При абсолютно не пружному ударі виконуються закони збереження імпульсу та повної енергії. Механічна ж енергія тіл до удару більше ніж після удару, так як вона частково (або повністю) переходить у внутрішню енергію тіл і витрачається на роботу деформації тіл.

Для визначення швидкості тіл після непружного удару розглянемо удар двох кульок (матеріальних точок), що утворюють замкнену систему. Маси куль m_1 і m_2, швидкості до удару $\vec{\upsilon_1}$ і $\vec{\upsilon_2}$.

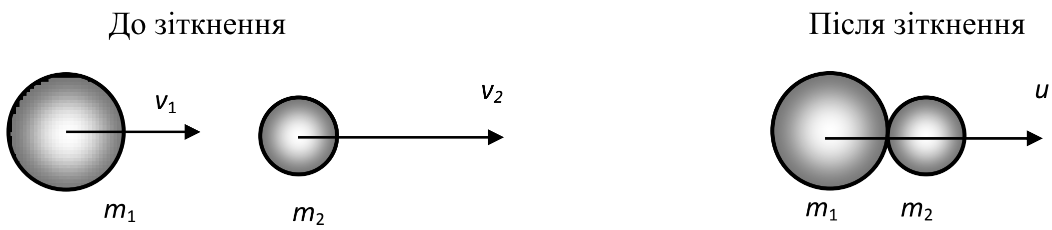


Рис.3.7.1.

ару повинен бути таким же, як після удару:

$$m_1\vec{\upsilon_1} + m_2\vec{\upsilon_2} = (m_1 + m_2)\vec{u}, \qquad (3.7.1)$$

де $\vec{u}$ - швидкість після удару, однакова для обох куль. З рівняння слідує, що:

$$\vec{u} = \frac{m_1\vec{\upsilon_1} + m_2\vec{\upsilon_2}}{m_1 + m_2} \qquad (3.7.2)$$

Закон збереження механічної енергії для не пружного удару не виконується, проте ми можемо написати:

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1 + m_2}{2}u^2 + W_{витрат} \qquad (3.7.3)$$

де $W_{витрат}$ - втрати механічної енергії в системі.

Для розрахунків швидкості потрібно спроектувати співвідношення імпульсів на обрані напрямки. Якщо до удару швидкості куль спрямовані вздовж прямої, що проходить через їх центри, удар називають *центральним*. Швидкість куль після такого удару буде спрямована на тій же прямій. Тому рівняння збереження імпульсів можна розглядати як скалярний. Але швидкості при цьому треба вважати однаковими за знаком, коли вони спрямовані в одну сторону і протилежними за знаком, коли вони спрямовані в протилежні сторони.

Розглянемо деякі окремі випадки непружних зіткнень:

1. *Кулі рухаються в одному напрямку.*

Удар можливий, якщо швидкості $\vec{\upsilon_1}$ і $\vec{\upsilon_2}$ різні. Наприклад, $\vec{\upsilon_2}$ > $\vec{\upsilon_1}$, тобто друга куля наздоганяє першу. Після удару кулі будуть рухатися в ту ж сторону зі швидкістю більшою, ніж швидкість першої кулі і меншою, ніж швидкість другої

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2} \qquad (3.7.4)$$

2. *Кулі рухаються назустріч один одному.*

Після удару кулі будуть рухатися разом в ту сторону, в яку рухалась куля, що володіє більшим імпульсом, тобто

$$u = \frac{m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2}{m_1 + m_2}\ . \qquad (3.7.5)$$

Якщо імпульси обох куль рівні за величиною, то після удару обидві кулі зупиняться.

2.12 Абсолютно пружний удар.

Під час удару тіла деформуються. Суть пружного удару полягає в тому, що кінетична енергія відносного руху контактуючих тіл на короткий час перетворюється в енергію пружної деформації, яка в свою чергу переходить знову в кінетичну енергію руху. За рахунок чого має місце перерозподіл енергії між контактуючими тілами.

Абсолютно пружний удар - зіткнення двох тіл під час якого зберігається не тільки геометрична сума імпульсів, а й сума кінетичних енергій взаємодіючих тіл, тобто виконуються закони збереження імпульсу та механічної енергії.

Розглянемо зіткнення двох тіл, та визначимо швидкості тіл після пружного удару. Позначимо швидкості куль масами m_1 *і* m_2 до удару через $\vec{\upsilon_1}$ *і* $\vec{\upsilon_2}$, після удару - через $\vec{u_1}$ *і* $\vec{u_2}$.

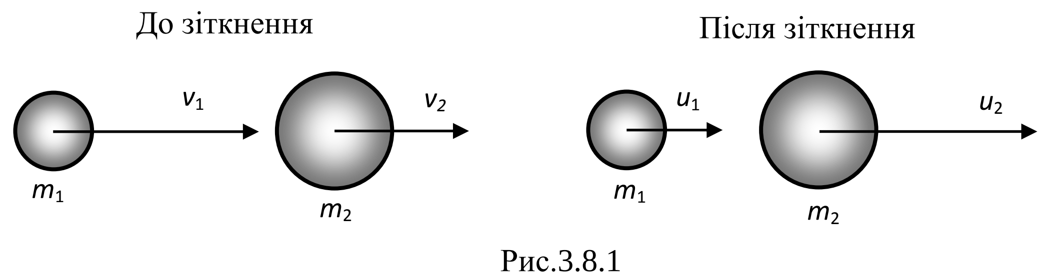


Рис.3.8.1

Закони збереження імпульсу та енергії мають вигляд:

$$m_1\vec{\upsilon_1} + m_2\vec{\upsilon_2} = m_1\vec{u_1} + m_2\vec{u_2} \qquad (3.8.1)$$

$$\frac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \frac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \frac{m_1u_1^2}{2} + \frac{m_2u_2^2}{2}. \qquad (3.8.2)$$

1) Розглянемо центральний удар при якому одна куля наздоганяє іншу, тоді проекції векторів співпадають з векторами і можна записати

$$\begin{cases} m_1\upsilon_1 + m_2\upsilon_2 = m_1u_1 + m_2u_2 \\ \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \dfrac{m_1u_1^2}{2} + \dfrac{m_2u_2^2}{2} \end{cases}. \qquad (3.8.3)$$

Скоротимо на двійку та перегрупуємо додатки

$$\begin{cases} m_1\upsilon_1 - m_1u_1 = m_2u_2 - m_2\upsilon_2 \\ m_1\upsilon_1^2 - m_1u_1^2 = m_2u_2^2 - m_2\upsilon_2^2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} m_1(\upsilon_1 - u_1) = m_2(u_2 - \upsilon_2) \\ m_1(\upsilon_1^2 - u_1^2) = m_2(u_2^2 - \upsilon_2^2) \end{cases}$$

$$\begin{cases} m_1(\upsilon_1 - u_1) = m_2(u_2 - \upsilon_2) \\ m_1(\upsilon_1 - u_1)(\upsilon_1 + u_1) = m_2(u_2 - \upsilon_2)(u_2 + \upsilon_2) \end{cases}.$$

Скориставшись першим рівнянням перепишемо друге як

$$m_2(u_2 - \upsilon_2)(\upsilon_1 + u_1) = m_2(u_2 - \upsilon_2)(u_2 + \upsilon_2) \ .$$

Після скорочення маємо

$$u_1 = u_2 + \upsilon_2 - \upsilon_1 \ .$$

Використавши цей зв'язок між швидкостями отримуємо із першого рівняння

$m_1(\upsilon_1 - u_2 - \upsilon_2 + \upsilon_1) = m_2(\ u_2 - \upsilon_2)$ або $2m_1\upsilon_1 - m_1\upsilon_2 + m_2\upsilon_2 = u_2(\ m_2 + m_1)$.

Звідси отримуємо

$$u_2 = \frac{2m_1\upsilon_1 + \upsilon_2(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1}. \qquad (3.8.4)$$

Тоді для швидкості першої кулі після зіткнення u_1 одержимо

$$u_1 = u_2 + \upsilon_2 - \upsilon_1 = \frac{2m_1\upsilon_1 + \upsilon_2(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} + \upsilon_2 - \upsilon_1 =$$

$$= \frac{2m_1\upsilon_1 + \upsilon_2(m_2 - m_1) + \upsilon_2(m_2 + m_1) - \upsilon_1(m_2 + m_1)}{m_2 + m_1}$$

звідки

$$u_1 = \frac{2m_2\upsilon_2 + \upsilon_1(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1}. \qquad (3.8.5)$$

2) Кулі рухаються на зустріч то закон збереження імпульсу та енергії має вигляд:

$$\begin{cases} m_1\upsilon_1 - m_2\upsilon_2 = m_1u_1 + m_2u_2 \\ \dfrac{m_1\upsilon_1^2}{2} + \dfrac{m_2\upsilon_2^2}{2} = \dfrac{m_1u_1^2}{2} + \dfrac{m_2u_2^2}{2} \end{cases}. \qquad (3.8.6)$$

Рішення цієї системи рівнянь є

$$u_1 = \frac{-2m_2\upsilon_2 + \upsilon_1(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1} \qquad (3.8.7)$$

$$u_2 = \frac{2m_1\upsilon_1 - \upsilon_2(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1}. \qquad (3.8.8)$$

<u>Розглянемо деякі окремі випадки пружних зіткнень:</u>

1. Рівні маси $m_1 = m_2 = m$.

1.1 Перша частинка наздоганяє другу $\upsilon_1 > \upsilon_2$.

$$u_1 = \frac{2m \cdot \upsilon_2}{m+m} = \upsilon_2,$$

$$u_2 = \frac{2m \cdot \upsilon_1}{m+m} = \upsilon_1. \qquad (3.8.9)$$

Тобто частинки обмінюються швидкостями, і після удару друга частинка віддаляється від першої.

1.2 Частинки рухаються на зустріч одна одній.

$$u_1 = \frac{-2m\upsilon_2}{m+m} = -\upsilon_2$$

$$u_2 = \frac{2m\upsilon_1}{m+m} = \upsilon_1. \qquad (3.8.10)$$

Після удару частинки рухаються в протилежні сторони, перша частка зі швидкістю другий до удару, а друга зі швидкістю першої.

1.3. *Друга частинка до удару нерухома*, тоді $\upsilon_2 = 0$ і ми знаходимо

$$u_1 = 0,$$

$$u_2 = \upsilon_1. \qquad (3.8.11)$$

Тобто після зіткнення перша частинка зупиняється, а друга починає рухатися зі швидкістю першої.

2. Рівні швидкості. Частинки рухаються назустріч один одному.

$$u_1 = \frac{-2m_2\upsilon + \upsilon(m_1 - m_2)}{m_2 + m_1} = \frac{-2m_2\upsilon + \upsilon m_1 - \upsilon m_2}{m_2 + m_1} = \frac{-3m_2\upsilon + \upsilon m_1}{m_2 + m_1} = \upsilon\frac{m_1 - 3m_2}{m_2 + m_1}$$

$$u_2 = \frac{2m_1\upsilon - \upsilon(m_2 - m_1)}{m_2 + m_1} = \frac{2m_1\upsilon - \upsilon m_2 + \upsilon m_1}{m_2 + m_1} = \upsilon\frac{3m_1 - m_2}{m_2 + m_1}. \qquad (3.8.12)$$

3. Нерухомий другий шар до зіткнення.

$$u_1 = \upsilon_1 \frac{m_1 - m_2}{m_2 + m_1},$$

$$u_2 = \frac{2m_1\upsilon_1}{m_2 + m_1}. \qquad (3.8.13)$$

Якщо маса першого кулі більше другого, то вона продовжить рух в тому ж напрямі, якщо менше, то покотиться назад. Другий шар після зіткнення почне рухатися.

4. *Перша куля стикається з нерухомою другою* кулею нескінченної маси, тобто $\upsilon_2 = 0$ і $m_2 \to \infty$, тоді

$$u_1 = \frac{\upsilon_1 (m_1 - m_2)}{m_2 + m_1} = \upsilon_1 \frac{m_1 / m_2 - m_2 / m_2}{m_2 / m_2 + m_1 / m_2} \to \upsilon_1 \frac{0-1}{1+0} = -\upsilon_1,$$

$$u_2 = \frac{2m_1\upsilon_1 / m_2}{m_2 / m_2 + m_1 / m_2} \to \frac{0}{1+0} = 0 \qquad (3.8.14)$$

Тобто перший м'яч відскакує назад з тією ж самою швидкістю.

ДИНАМІКА ОБЕРТАЛЬНОГО РУХУ ТВЕРДОГО ТІЛА.

3.1. Момент інерції матеріальної точки та твердого тіла. Теорема Штейнера.

Основна величина, яка є мірою інертності в обертальному русі є момент інерції. Від моменту інерції залежить швидкість зміни кутової швидкості та кутового прискорення при дії на тіло (матеріальну точку) моменту сили.

Моментом інерції матеріальної точки відносно нерухомої осі обертання називається скалярна фізична величина, що дорівнює добутку маси точки на квадрат відстані до осі обертання.

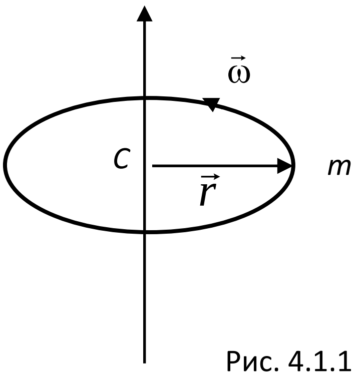


Рис. 4.1.1

$$I = mr^2, \qquad (4.1.1)$$

де m – маса матеріальної точки;
r – відстань від точки до осі обертання.

Для знаходження моменту інерції твердого тіла, необхідно розбити тіло на елементарні маси Δm_i, та скласти моменти інерції кожної з них:

$$I = \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_i^2, \qquad (4.1.2)$$

де m_i - маса i-ої матеріальної точки, r_i - радіус обертання i-ої матеріальної точки.

Для знаходження моменту інерції твердого тіла з нерівномірно, безперервного розподілу мас, слід перейти від суми до інтегрування за обсягом тіла V :

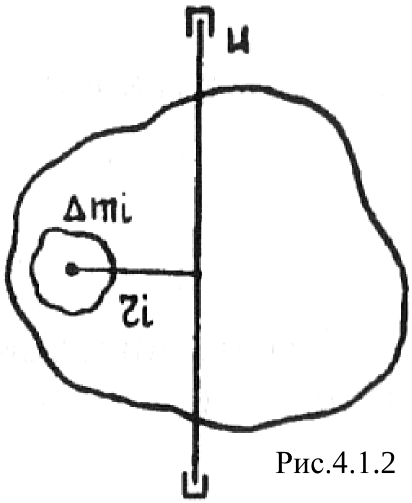


Рис.4.1.2

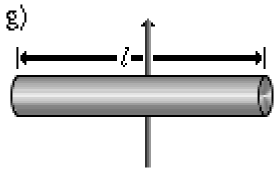
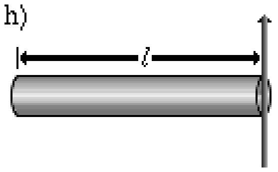
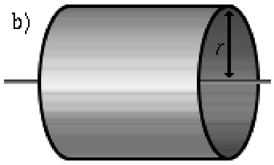
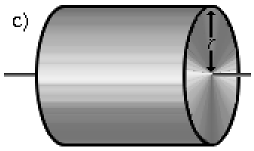
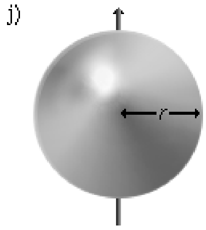
$$I = \lim_{N \to \infty} \sum_{i=1}^{N} \Delta m_i r_i^2 = \int_V r^2 dm.$$

Для однорідного тіла $dm = \rho dV$, де $\rho = m/V$ – його густина, тоді

$$I = \rho \int_V r^2 dV. \qquad (4.1.4)$$

В таблиці 4.1. наведені моменти інерції деяких геометричних твердих тіл відносно осі обертання.

Таблиця.4.1.

Тіло	Рисунок	Вісь, відносно якої визначається момент інерції тіла	Момент інерції тіла
Однорідний тонкий стрижень масою m і довжиною l		Проходить через центр тяжіння стрижня перпендикулярно до нього	$I = \frac{ml^2}{12}$
Однорідний тонкий стрижень масою m і довжиною l		Проходить через кінець стрижня перпендикулярно до нього	$I = \frac{ml^2}{3}$
Тонке кільце, обруч, труба радіусом R і масою m, маховик радіусом R і масою m		Проходить через центр тяжіння перпендикулярно до площини основи	$I = mR^2$
Суцільний циліндр або диск радіусом R і масою m		Проходить через центр тяжіння перпендикулярно до площини основи	$I = \frac{mR^2}{2}$
Однорідна куля масою m і радіусом R		Проходить через центр кулі	$I = \frac{2mR^2}{5}$

Для обчислення моментів інерції твердого тіла відносно довільної вісі обертання використовують *теорему Штейнера*:

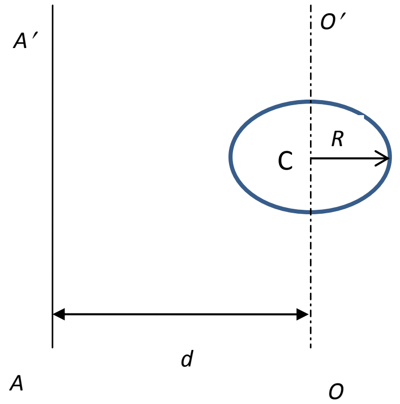


Рис.4.1.1

Момент інерції I_A тіла відносно деякої осі AA' дорівнює сумі моменту інерції тіла I_C відносно осі OO', що проходить через його центр мас C паралельно осі AA', і добутку маси тіла на квадрат відстані d між цими осями (Рис.4.1.1)*:*

$$I_A = I_C + md^2. \qquad (4.1.6)$$

де I_0 – момент інерції цього тіла відносно осі OO', що проходить через центр мас тіла; d – відстань між паралельними осями; m – маса тіла.

3.2. Момент сили. Основне рівняння динаміки обертального руху.

Закони механіки обертального руху пов'язані з поняттями *моменту сили* та *моментом імпульсу* тіла.

Моментом сили називається величина, яка є мірою взаємодії тіл в обертальному русі. Слід розрізняти момент сили відносно точки і відносно осі.

Нехай O – будь яка точка, яку називається *центром* або *полюсом обертання.* Позначимо $\vec{r}$ радіус-вектор, проведений із цієї точки до точки прикладання сили $\vec{F}$ (рис. 4.2.1).

Моментом сили $\vec{F}$ *відносно полюса обертання O* називається векторний добуток радіус-вектора $\vec{r}$, *проведеного з точки O в точку прикладання сили, на силу* $\vec{F}$ *:*

$$\vec{M} = \left[\vec{r} \times \vec{F}\right]$$

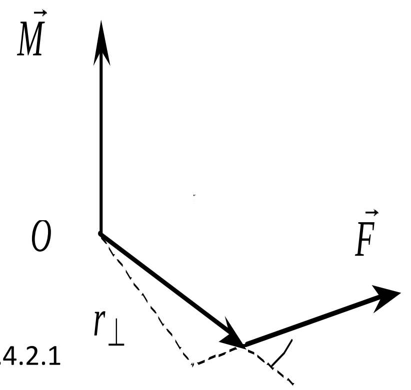


Рис.4.2.1

Іапрямок моменту сили ають за правилом правого гвинта, уль дорівнює:

$$M = rF\sin\alpha = r_\perp F, \qquad (4.2.2)$$

де α – кут між векторами $\vec{F}$ і радіус - вектором $\vec{r}$, $r_\perp = r\sin\alpha$ – *плече сили* – довжина перпендикуляра, опущеного з полюса O на лінію дії сили $\vec{F}$.

Момент сили не змінюється при переносі точки прикладання сили вздовж лінії її дії.

Якщо на тіло діє декілька сил, то результуючий момент сили відносно

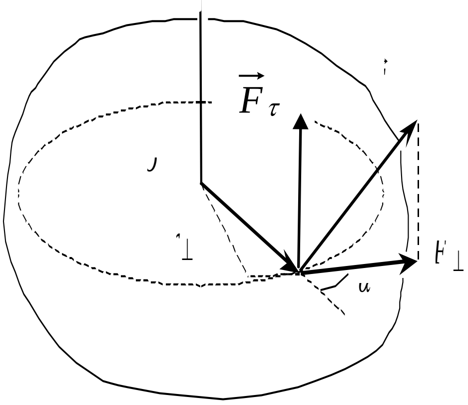


Рис.4.2.2

полюса O буде дорівнювати геометричній сумі моментів всіх сил.

$$\overrightarrow{M} = \sum_i M_i = \sum_i \left[\vec{r} \times \overrightarrow{F}\right], \qquad (4.2.3)$$

Розглянемо тверде тіло, закріплене на осі. Зміна швидкості його обертання викликається зовнішніми силами. Дія сили залежить від її направлення і від точки прикладання. Складова зовнішньої сили уздовж осі не може змінювати кутову швидкість обертання тіла (рис.4.2.2).

Моментом сили відносно нерухомої осі обертання Z називається добуток складовою цієї сили $F_\perp$, що лежить у площині, перпендикулярній до осі, на її плече.

$$M_z = F_\perp\, r \cdot sin\alpha = F_\perp \cdot r_\perp, \qquad (4.2.4)$$

де $r_\perp$ – плече сили $F_\perp$, а $F_\perp$ - проекції зовнішньої сили на площину, перпендикулярну до осі обертання (рис.4.2.2).

Обертальна здібність сили залежить від складової F_τ, то з другого закону Ньютона

$$F_\tau = ma_\tau$$

де $a_\tau = \varepsilon\, r$ - тангенціальне прискорення, ε - кутове прискорення, звідки другий закон

$$F_\tau = m\varepsilon\, r \qquad (4.2.5)$$

Помножимо праву і ліву частини рівняння на r, отримуємо

$$F_\tau \cdot r = (m\varepsilon\, r)\, r$$

Враховуючі, що $F_\tau \cdot r = M$ - момент сили і $I = m r^2$ - момент інерції точки, отримуємо:

$$M = I \cdot \varepsilon \qquad (4.2.6)$$

Так як момент сили і кутове прискорення величини векторні, то рівняння (6.2.6) можна записати у векторній формі:

$$\overrightarrow{M} = I \cdot \vec{\varepsilon} \qquad (4.2.7)$$

Це рівняння є основним рівнянням динаміки обертального руху (другий закон Ньютона для обертального руху): *Момент сили що діє на тіло, дорівнює добутку моменту інерції тіла на кутове прискорення.*

3.3. Момент імпульсу. Рівняння моментів.

Момент імпульсу є кількісною характеристикою обертального руху.

Під моментом імпульсу $\vec{L}$ матеріальної точки відносно полюса O називається векторний добуток радіус-вектора $\vec{r}$, що з'єднує полюс з матеріальною точкою, на вектор її імпульсу $\vec{p}$.

$$\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}\,. \qquad (4.3.1)$$

Вектор моменту імпульсу $\vec{L}$ направлений вздовж осі обертання в напрямку який визначається за правилом правого гвинта.

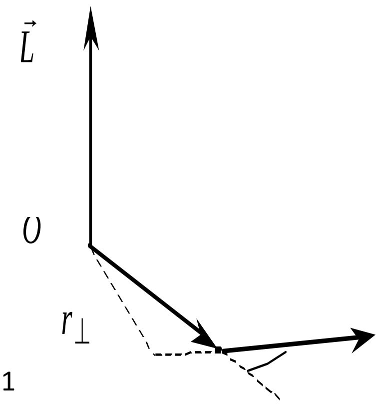


Рис.4.3.1

$$L = m\upsilon r \qquad (4.3.2)$$

Момент імпульсу частинки, що рухається вздовж прямої лінії (рис.4.3.1) дорівнює:

$$L = r\,p\sin\alpha = r_{\perp} m\mathrm{v} \qquad (4.3.3)$$

Якщо на частинку не діють сили, її швидкість не змінюється то момент імпульсу залишається постійним.

Щоб знайти момент імпульсу твердого тіла, що обертається навколо осі Z з кутовою швидкістю ω, розіб'ємо тіло на N матеріальних точок масами m_i.

Момент імпульсу кожної точки

$$L_{zi} = m_i \upsilon_i r_i = m_i r_i^2 \omega\,, \qquad (4.3.4)$$

оскілки її швидкість $\upsilon_i = \omega r_i$, де r_i – відстань точки від осі обертання. Підсумовуючи по всіх точках і виносячи за знак суми загальний множник ω, одержимо момент імпульсу тіла відносно осі Z:

$$L_z = \left(\sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2 \right) \omega\,. \qquad (4.3.5)$$

Вираз у дужках називається *моментом інерції* тіла відносно осі Z:

$$I_z = \sum_{i=1}^{N} m_i r_i^2\,. \qquad (4.3.6)$$

Звідси отримуємо, що момент імпульсу тіла, закріпленого на осі, дорівнює добутку моменту інерції на кутову швидкість:

$$L_z = I_z \omega\,. \qquad (4.3.7)$$

Момент імпульсу твердого тіла відносно осі обертання Z дорівнює добутку моменту інерції відносно тієї ж осі і кутової швидкості.

Розглянемо виведення формули рівняння моментів у самому простому випадку. Нехай матеріальна точка рухається по колу радіусом r тоді її імпульс (також як і швидкість) спрямований під кутом 90° до радіус-вектора і вираз для моменту імпульсу $\vec{L} = \vec{r} \times \vec{p}$ можна написати в скалярному вигляді

$$L = r\,p\,. \qquad (4.3.8)$$

Обчислимо похідну за часом від цього виразу

$$\frac{dL}{dt} = \frac{d(rp)}{dt} = r\frac{dp}{dt}\,, \qquad (4.3.9)$$

де ми врахували, що при русі по колу модуль радіус-вектора не змінюється.

З другого закону Ньютона випливає, що

$$F = \frac{dp}{dt},$$

тоді

$$\frac{dL}{dt} = r \cdot F . \qquad (4.3.10)$$

В даному випадку добуток $r \cdot F$ визначає момент сили, що діє на матеріальну точку, тобто

$$M = r \cdot F . \qquad (4.3.11)$$

Остаточно одержуємо рівняння моментів у скалярному вигляді

$$\frac{dL}{dt} = M . \qquad (4.3.12)$$

У векторному вигляді.

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \frac{d\vec{r}}{dt} \times \vec{p} + \vec{r} \times \frac{d\vec{p}}{dt} . \qquad (4.3.13)$$

Похідна радіуса-вектора $\vec{r}$ дорівнює швидкості матеріальної точки $d\vec{r}/dt = \vec{\upsilon}$, а оскільки вектори $\vec{\upsilon}$ і $\vec{p}$ паралельні один одному, їх векторний добуток звертається в нуль. У другому доданок $d\vec{p}/dt = \vec{F}$, а векторний добуток $\vec{r} \times \vec{F}$ утворює момент сили $\vec{M}$, тому

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M} . \qquad (4.3.14)$$

Це співвідношення називається рівнянням моментів: *Похідна по часу моменту імпульсу матеріальної точки відносно нерухомого центру дорівнює моменту діючої сили відносно того ж центра.*

3.4 Закон збереження моменту імпульсу.

За аналогією з динамікою поступального руху можна показати, що рівняння моментів, виведене в розділі (4.3), можна узагальнити на випадок системи N частинок (матеріальних точок).

Якщо на кожну з матеріальних точок системи діють *зовнішні* і *внутрішні* сили, то момент зовнішніх сил, прикладених до кожної з матеріальних точок системи дорівнює:

$$\vec{M}_{зовніш} = \sum_{i=1}^{N} \vec{r}_i \times \vec{F}_i^{\,зовніш} , \qquad (4.4.1)$$

де $\vec{M}_{зовніш}$ - *результуючий або головний момент зовнішніх сил.*

Під *зовнішніми силами* слід розуміти сили, що діють на матеріальні точки системи ззовні, а під *внутрішніми* – сили, з якими кожна матеріальна точка системи діє на всі інші її точки. Тоді рівняння моментів (4.3.14) для системи матеріальних точок у векторній формі, буде мати вигляд:

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{M}_{зовніш}. \qquad (4.4.2)$$

Якщо ми маємо замкнуту систему , то момент зовнішніх сил буде дорівнювати нулю:

$\vec{M}_{зовніш} = 0$ тоді з рівняння моментів отримуємо, що

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = 0 \qquad (4.4.3)$$

Звідки слідує, що

$$\vec{L} = const \text{ , або } I\vec{\omega} = const \qquad (4.4.4)$$

З нього випливає закон збереження моменту імпульсу: *якщо результуючий момент зовнішніх сил, діючих на систему матеріальних точок, дорівнює нулю, то момент імпульсу системи залишається постійним у часі.* Закон збереження моменту імпульсу є одним з фундаментальних законів фізики поряд із законами збереження імпульсу і енергії.

3.5 Кінетична енергія твердого тіла при обертальному і поступальному русі.

Розглянемо рух матеріальної точки по колу і на цьому прикладі введемо нові величини, які необхідні при описі обертального руху твердого тіла.

Нехай матеріальна точка масою m починає рух по колу радіусом R під дією сили F ,яка завжди спрямована по дотичній до цього кола.

$$A = F \cdot s = W_{кин} = \frac{m\text{v}^2}{2}, \qquad (4.5.1)$$

де s - шлях, який проходить матеріальна точка по колу при повороті на кут φ. Перейдемо від лінійних величин до кутових $s = R\varphi,\ \text{v} = \omega R$.

Отримуємо

$$F \cdot s = FR \cdot \varphi = \frac{m\text{v}^2}{2} = \frac{mR^2\omega^2}{2}. \qquad (4.5.2)$$

Нагадаємо, що добуток сили на плече називається моментом сили

$$M = FR,$$

добуток маси матеріальної точки на квадрат радіусу кола, по якій здійснюється обертання, називається моментом інерції матеріальної точки: $I = mR^2$.

1) Робота при обертальному русі визначається виразом:

$$A = M \cdot \varphi \tag{4.5.3}$$

2) Кінетична енергія при обертальному русі визначається виразом:

$$W_{вр} = \frac{I\omega^2}{2}. \tag{4.5.4}$$

Помноживши чисельник і знаменник на і скориставшись співвідношенням $L = I\omega$, цю формулу можна представити у вигляді:

$$W_{вр} = \frac{L^2}{2I}. \tag{4.5.5}$$

Теорема. *Кінетична енергія рухомого тіла дорівнює сумі кінетичної його енергії поступального руху і енергії обертання навколо осі, що проходить через центр мас тіла перпендикулярно до напрямку його руху (теорема Кеніга):*

$$W_{кин} = W_{пост} + W_{вр}. \tag{4.5.6}$$

Узагальнюючі зазначене, наведемо аналогію між поступальними і обертальними величинами у вигляді таблиці 4.5.

Таблиця 4.5.

Поступальний рух (прямолінійний)		***Обертальний рух (навколо нерухомої осі)***	
Координата	x	Кутова координата	φ
Швидкість	$\upsilon = \frac{dx}{dt}$	Кутова швидкість	$\omega = \frac{d\varphi}{dt}$
Прискорення	$a = \frac{d\upsilon}{dt}$	Кутове прискорення	$\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$
Маса	m	Момент інерції	I
Імпульс	$\vec{p} = m\vec{\upsilon}$	Момент імпульсу	$\vec{L} = J\vec{\omega}$
Закон збереження імпульсу (для двох тіл)	$\vec{p}_1 + \vec{p}_2 = \vec{p}_1' + \vec{p}_2'$	Закон збереження моменту (для двох тіл)	$\vec{L}_1 + \vec{L}_2 = \vec{L}_1' + \vec{L}_2'$

Сила $\vec{F}$	Момент сили $\vec{M}$
Другий закон Ньютона $\vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$ $\vec{F} = m\vec{a}$	Другий закон Ньютона $\vec{M} = \frac{d\vec{L}}{dt}$ $\vec{M} = I\vec{\varepsilon}$
Робота $dA = \vec{F} \cdot d\vec{r}$	Робота $dA = \vec{M} \cdot \overrightarrow{d\varphi}$
Кінетична енергія $W_к = \frac{m\upsilon^2}{2}$	Кінетична енергія $W_{вр} = \frac{J\,\omega^2}{2}$