Практика №1
«Кінематика поступального руху.»

Приклад 1. Рівняння руху матеріальної точки вздовж осі x має вигляд $x = A + Bt + Ct^3$, де $A = 2$ *м*; $B = 1$ *м/с*; $C = -0,5$ *м/с*^{3}. Знайти координату швидкість і прискорення точки в момент часу 2с.

Дано:
$x = A + Bt + Ct^3$
$A = 2$ *м*
$B = 1$ *м/с*
$C = -0,5$ *м/с*^{3}
$t = 2$ *с*
x – ? υ – ? a – ?

Розв'язання. Координату точки знайдемо, підставивши в рівняння руху числові значення коефіцієнтів A, B, C і часу t:

$$x = (2+1\cdot 2 - 0,5\cdot 23)\ \text{м} = 0\ .$$

Оскільки потрібно знайти швидкість і прискорення в певний момент часу ($t = 2$ *с*), то це означає, що потрібно визначити миттєві величини υ_x і a_x .

Миттєва швидкість є першою похідною від координати за часом

$$\upsilon_x = \frac{dx}{dt} = B + 3Ct^2\ .$$

Прискорення точки знайдемо, взявши першу похідну від швидкості за часом,

$$a_x = \frac{d\upsilon_x}{dt} = 6Ct\ .$$

Виконавши необхідні обчислення для моменту часу $t = 2$ *с*, одержимо

$$\upsilon_x = (1 - 3\cdot 0,5\cdot 22)\ \text{м/с} = -5\ \text{м/с}\ ,$$

$$a_x = 6\,(-0,5)\cdot 2\ \text{м/с}^2 = -6\ \text{м/с}^2\ .$$

Приклад 2. Рівняння руху матеріальної точки вздовж осі x має вигляд: $x(t) = t^2 - 4t + 1$.

Знайти:

1) переміщення тіла за час від t_1=0 с до t_2=5 с;
2) шлях тіла за час від t_1=0 с до t_2=5 с;
3) швидкість тіла наприкінці 3-ії секунді;
4) середню шляхову швидкість за перші три секунди;
5) середню швидкість переміщення за перші три секунди;
6) прискорення наприкінці 3-ії секунді.

Дано:

$x(t) = t^2 - 4t + 1$

t_1=0 с

t_2=5 с

t_3=3 с

$\Delta x(0{,}5) - ?$ $S(0{,}5)$ -? $\mathrm{v}(3)$ -?

$\mathrm{v}_{\text{сер.шлях.}}(0{,}3)$ -? $\mathrm{v}_{\text{сер.пер.}}(0{,}3)$ -?

$a(3)$ -?

Рішення:

1) Для одномірного руху положення в будь-який момент часу можна задати тільки одним числом, в даному випадку це координата x:

$$\Delta x = x(t_2) - x(t_1).$$

Тоді переміщення тіла за час від t_1=0 с до t_2=5 с:

$$\Delta x = x(5) - x(0) = 6 - 1 = 5\text{м}.$$

При $\Delta x > 0$ тіло за час свого руху перемістилося вправо (негативне переміщення вказувало б на зміщення вліво).

2) Щоб визначити шлях необхідно перевірити, зупинялось тіло за проміжок часу t_1=0 с до t_2=5 с, або ні?

Знайдемо час зупинки, для цього необхідно взяти похідну за часом від функції $x(t)$ і прирівняти її до нуля:

$$\frac{dx}{dt} \equiv \dot{x} = 0.$$

Тобто $$\dot{x} = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^2 - 4t + 1\right) = 2t - 4,$$

$$2t - 4 = 0$$

Знайдемо час зупинки:

$$t_{зупинки} = 2\text{с}.$$

Оскільки, час зупинки знаходиться між часом $t_1 < t_{зупинки} < t_2$, то необхідно це врахувати. Тоді повний шлях знаходиться за формулою:

$$S(t_{1,}t_2) = S(t_{1,}t_{зуп}) + S(t_{зуп}, t_{2,}) = |x(2) - x(0)| + |x(5) - x(2) =|$$
$$= |-3 - 1| + |6 - (-3)| = 4 + 9 = 13\text{м}.$$

3) Для одновимірного випадку миттєва швидкість визначається як:

$$\mathrm{v}(t) = \frac{dx}{dt} = \frac{d}{dt}\left(t^2 - 4t + 1\right) = 2t - 4\,\text{м/с}.$$

Підставимо $t = 3\,\text{с}$, знайдемо швидкість тіла наприкінці 3-ії секунді:

$$\mathrm{v}(3) = 2t - 4\big|_{t=3} = 2 \cdot 3 - 4 = 6 - 4 = 2\,\text{м/с}.$$

4) Середню шляхову швидкість обчислимо за формулою:

$$\mathrm{v}_{\text{сер.шлях.}} = \frac{S(t_1,t_2)}{t_2 - t_1},$$

$$\mathrm{v}_{\text{сер.шлях.}}(0,3) = \frac{S(0,3)}{3-0} = \frac{S(0,2)+S(2,3)}{3}.$$

Підставимо числові значення:

$$\mathrm{v}_{\text{сер.шлях.}}(0,3) = \frac{|x(2)-x(0)|+|x(3)-x(2)|}{3} = \frac{|-3-1|+|-2-(-3)|}{3} = \frac{4+1}{3} = 1{,}67\,\text{м/с}.$$

Середня швидкість по переміщенню:

$$\mathrm{v}_{\text{сер.пер.}}(t_1,t_2) = \frac{x(t_1,t_2)}{t_2 - t_1}$$

$$\mathrm{v}_{\text{сер.пер.}}(0,3) = \frac{x(3)-x(0)}{3-0} = \frac{-2-1}{3} = -1\,\text{м/с}.$$

5) У разі прямолінійного руху прискорення визначається як:

$$a(t) = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{d}{dt}\left(\frac{dx}{dt}\right) = \frac{d^2x}{dt^2}.$$

Підставимо вираз для швидкості, знайдемо:

$$a(t) = \frac{d\mathrm{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(2t-4) = 2\,\text{м/с}^2.$$

Бачимо, прискорення в даній задачі від часу не залежить, отже, в будь-який момент часу воно дорівнює отриманому значенню $a(3) = 2\,\text{м/с}^2$.

Приклад 3. Автомобіль проходить першу третину шляху з деякою швидкістю v_1, а решту шляху зі швидкістю $\mathrm{v}_2 = 50\frac{\text{км}}{\text{год}}$. Знайти швидкість на першій ділянці шляху, якщо середня швидкість на всьому шляху дорівнює $\mathrm{v} = 37{,}5\frac{\text{км}}{\text{год}}$.

Дано:	Рішення
$S_1 = \frac{S}{3}$, $S_2 = S - \frac{S}{3} = \frac{2S}{3}$ $\mathrm{v}_2 = 50\frac{\text{км}}{\text{год}}$ $\mathrm{v} = 37{,}5\frac{\text{км}}{\text{год}}$	Середня швидкість руху $$\mathrm{v}_{cp} = \frac{S}{t},$$ де $S = S_1 + S_2$ шлях; $t = t_2 + t_1 -$ час, за який був пройдений шлях S.
$\mathrm{v}_1 - ?$	

Швидкість на другій ділянці: $t_2 = \frac{2S}{3v_2}$. , $v_2 = \frac{S_2}{t_2} = \frac{\frac{2S}{3}}{t_2} = \frac{2S}{3\cdot t_2}$, звідки час руху

автомобіля на першій ділянці: $t_1 = \frac{S_1}{v_1} = \frac{\frac{S}{3}}{v_1} = \frac{S}{3v_1}$.

$v_{cp} = \frac{S_1 + S_2}{t_2 + t_1} = \frac{S}{\frac{2S}{3v_2} + \frac{S}{3v_1}}$; звідки $v_{cp}\left(\frac{2S}{3v_2} + \frac{S}{3v_1}\right) = S$,

після спрощення: $v_{cp}\left(\frac{2}{3v_2} + \frac{1}{3v_1}\right) = 1$.

Розкривши дужки, отримаємо: $\frac{v_{cp}}{3v_1} = 1 - \frac{2v_{cp}}{3v_2}$, звідки $v_1 = \frac{v_{cp}}{3\left(1 - \frac{2v_{cp}}{3v_2}\right)}$.

Підставимо числові значення:

$$v_1 = \frac{37{,}5}{3\left(1 - \frac{2\cdot 37{,}5}{3\cdot 50}\right)} = \frac{37{,}5}{3\left(1 - \frac{75}{150}\right)} = \frac{37{,}5}{3(1 - 0{,}5)} = 25\,\frac{\text{км}}{\text{год}}.$$

Пример 4. Радиус-вектор частицы изменяется по закону $\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + 2t\vec{j} - \vec{k}$

Найти:

1) вектор скорости $\vec{v}$;
2) вектор ускорения $\vec{a}$;
3) модуль вектора скорости v в момент времени t = 2 с;
4) путь, пройденный телом за первые 10 с.

Дано:	Решение:
$\vec{r}(t) = t^2\vec{i} + 2t\vec{j} - \vec{k}$	1) Для определения вектора скорости, воспользуемся формулой:
$\vec{v}$ -? $\vec{a}$ -? $v(2)$ -? $S(0{,}10) - ?$	$\vec{v} = \frac{d\vec{r}}{dt} = \frac{d}{dt}(t^2\vec{i} + 2t\vec{j} - \vec{k}) = 2t\vec{i} + 2\vec{j}$

2) Для определения вектора ускорения, воспользуемся формулой:

$$\vec{a} = \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d}{dt}(2t\vec{i} + 3t\vec{j}) = 2\vec{i}$$

3) Так как $\vec{v}(t) = v_x\vec{i} + v_y\vec{j} - v_z\vec{k}$, то модуль скорости $|v| = \sqrt{v_x^{\ 2} + v_y^{\ 2} - v_z^{\ 2}}$

В нашем случае $v_x = 2t$, $v_y = 2\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$

$$\mathrm{v}(2)=\sqrt{(2t)^2+2^2}=2\sqrt{(t)^2+1}=2\sqrt{5}\approx 4{,}46\,\frac{\text{м}}{\text{с}}$$

По определению путь $S=\int\limits_{t_1}^{t_2} v\,dt$, где

$$\mathrm{v}(t)=2\sqrt{(t)^2+1}$$

$$S=\int\limits_{t_1}^{t_2} 2\sqrt{(t^2+1)}\,dt=\int\limits_{t_1}^{t_2} 2(t^2+1)^{1/2}\,dt=2\left(\frac{t}{2}\sqrt{(t^2+1}+\frac{1}{2}\ln\left(t+\sqrt{(t^2+1)}\right)\right)\Bigg|_{t_1}^{t_2}=103\,\text{м}.$$