

Практика 2

АУУ. УНУ. Закони сохранения

Задача 1

У кузов візка з піском загальною масою 40 кг , що рухається горизонтально зі швидкістю 5 м/с , попадає камінь масою 10 кг і застрягає в піску. Знайти швидкість візка після зіткнення з каменем, якщо камінь перед попаданням у візок летів зі швидкістю 5 м/с під кутом 60° до горизонту назустріч візку. Сили зовнішнього опору руху візка не враховувати.

Дано:

$$M = 40 \text{ кг}$$

$$v_1 = 5 \text{ м/с}$$

$$m = 10 \text{ кг}$$

$$v_2 = 5 \text{ м/с}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$u = ?$$

Розв'язання. Оскільки силами опору в задачі можна знехтувати, то для такого руху система є замкнутою й для цієї системи тіл виконується закон збереження імпульсу (точніше, закон збереження горизонтальної складової імпульсу).

Запишемо закон збереження імпульсу в напрямі руху візка

$$Mv - mv \cos \alpha = (M + m)u,$$

де M – маса візка з піском; m – маса каменя; v – швидкість візка;
 $v \cos \alpha$ – горизонтальна складова швидкості каменя; u – швидкість візка і каменя після непружної взаємодії.

Звідки одержуємо:
$$u = \frac{Mv - mv \cos \alpha}{M + m} = \frac{40 \cdot 5 - 10 \cdot \cos 60}{40 + 10} = 3,5 \text{ м/с}.$$

Задача 2

Куля масою 1 кг , рухаючись горизонтально, зіштовхується з нерухомою кулею масою 12 кг . Кулі абсолютно пружні, удар прямий, центральний. Яку частину своєї кінетичної енергії перша куля передала другій?

Дано:

$$m_1 = 1\text{ кг}$$

$$m_2 = 12\text{ кг}$$

$$v_2 = 0$$

Удар пружний

$$E = \frac{W_{k2}}{W_{k1}} - ?$$

Розв'язання. При абсолютно пружному центральному зіткненні виконуються закони збереження імпульсу й енергії. Тому з урахуванням того, що друга куля до зіткнення була нерухома, одержуємо два рівняння

$$\begin{aligned} m_1 v_1 &= m_1 u_1 + m_2 u_2, \\ \frac{m_1 v_1^2}{2} &= \frac{m_1 u_1^2}{2} + \frac{m_2 u_2^2}{2}, \end{aligned} \quad (1)$$

де v_1 – швидкість першої кулі до удару; u_1 й u_2 – швидкості першої й другої кулі після удару.

При цьому із закону збереження імпульсу треба враховувати, що після удару перша й друга кулі рухаються уздовж прямої, по якій рухалася перша куля до удару.

Частина енергії, передана першою кулею другій, визначається співвідношенням

$$E = \frac{W_{k2}}{W_{k1}} = \frac{m_2 u_2^2 / 2}{m_1 v_1^2 / 2} = \frac{m_2}{m_1} \left(\frac{u_2}{v_1} \right)^2, \quad (2)$$

Розв'язавши систему (1), одержуємо: $u_2 = \frac{2m_1 v_1}{m_1 + m_2}$.

Підставивши u_2 у формулу (2) і скоротивши на v_1 і m_1 , знаходимо

$$\dot{A} = \frac{m_2}{m_1} \left[\frac{2m_1 v_1}{v_1 (m_1 + m_2)} \right]^2 = \frac{4m_1 m_2}{(m_1 + m_2)^2}. \quad (3)$$

Співвідношення (3) симетричне відносно мас куль m_1 і m_2 , тому частина переданої енергії не зміниться, якщо маси куль поміняти місцями.

Підставляючи у вираз (3) числові значення m_1 і m_2 , одержимо

$$\dot{A} = \frac{4 \cdot 1 \cdot 12}{(1 + 12)^2} = 0,284.$$

Задача 3

Сталева пружина під дією сили 300 Н видовжується на 2 см . Яку потенціальну енергією буде мати ця пружина при її видовженні на 10 см ?

Дано:

$$F_1 = 300\text{ Н}$$

$$x_1 = 2\text{ см} = 2 \cdot 10^{-2}\text{ м}$$

$$x_2 = 10\text{ см} = 10^{-1}\text{ м}$$

$$W_n - ?$$

Розв'язання. Потенціальна енергія розтягнутої пружини дорівнює

$$W_n = \frac{kx_2^2}{2}. \quad (1)$$

При цьому коефіцієнт жорсткості пружини можна визначити із закону Гука:

$$F = kx, \quad \text{де } F - \text{величина зовнішньої сили.}$$

Звідси одержуємо

$$k = F/x = F_1/x_1. \quad (2)$$

Якщо вираз (2) підставити в (1), одержуємо

$$W_n = \frac{F_1 x_2^2}{2x_1}.$$

Підставляючи чисельні значення сили й деформацій, знаходимо

$$W_n = \frac{300}{2} \frac{10^{-2}}{2 \cdot 10^{-2}} = 75\text{ Дж.}$$

Задача 4

Диск діаметром 20 см і масою 2 кг обертається навколо осі, яка проходить через його центр. Кут повороту диска змінюється з часом за законом $\varphi = A + Bt + Ct^2$, де $C = -2\text{ рад/с}^2$. Визначити величину гальмівної сили, прикладеної до обода диска.

Дано:

$$D = 20\text{ см} = 0,2\text{ м}$$

$$m = 2\text{ кг}$$

$$\varphi = A + Bt + Ct^2$$

$$C = -2\text{ рад/с}^2$$

$$F_2 - ?$$

Розв'язання. Плече гальмівної сили відоме. У цьому випадку воно дорівнює радіусу диска R . Тому гальмівну силу, прикладену до обода, можна знайти зі співвідношення: $F_2 = M/R$.

Гальмівний момент M може бути розрахований з основного рівняння динаміки обертального руху $M = I\varepsilon$,

Для розрахунку цих двох величин є всі необхідні дані:

$$\varepsilon = \frac{d^2\varphi}{dt^2} = 2\text{ С}; \quad I = \frac{1}{2}mR^2 - \text{момент інерції диска.}$$

$$F = \frac{M}{R} = \frac{2CmR^2 / 2}{R} = CmR = Cm \frac{D}{2} .$$

Провівши необхідні розрахунки, одержимо

$$F = -2(1/2) \text{ рад/с}^2 \cdot 2 \text{ кг} \cdot 0,2 \text{ м} = - 0,4 \text{ Н}.$$

Задача 5

Однородный цилиндр скатывается с наклонной плоскости высотой 90 см. Какую линейную скорость будет иметь центр цилиндра в тот момент, когда он скатится с плоскости?

| | |
|-------------------------------------|--|
| $h = 90 \text{ см} = 0,9 \text{ м}$ | Решение: На высоте h цилиндр обладает потенциальной энергией $W_{\text{ном}} = mgh,$ где m - масса груза, $g = 9,81 \text{ м/с}^2$ - ускорение свободного падения. |
| $v - ?$ | |

При скатывании цилиндра эта энергия переходит в кинетическую энергию поступательного движения:

$$W_{\text{ном}} = \frac{mv^2}{2}$$

и кинетическую энергию вращательного движения: $W_{\text{вращ}} = \frac{I\omega^2}{2},$

где v - скорость центра масс цилиндра, I - момент инерции цилиндра, ω - угловая скорость вращения цилиндра.

Из закона сохранения энергии: $mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{I\omega^2}{2}.$

Момент инерции однородного цилиндра (однородного диска): $I = \frac{mR^2}{2}.$

Угловая скорость связана с линейной соотношением: $\omega = \frac{v}{R}.$

Подставляя эти выражения, в закон сохранения энергии получим

$$mgh = \frac{mv^2}{2} + \frac{mR^2}{2} \frac{v^2}{R^2}.$$

Сократив, получим: $gh = \frac{v^2}{2} + \frac{1}{2} \frac{v^2}{2} = \frac{3}{4} v^2,$ откуда $v = 2\sqrt{\frac{gh}{3}}.$

Проверим на размерность эту формулу: $[v] = \sqrt{\text{м/с}^2 \cdot \text{м}} = \text{м/с}.$

Подставляя числа, получаем $v = 2\sqrt{\frac{9,81 \cdot 0,9}{3}} = 3,44 \text{ м/с}.$