

Лабораторна робота № 16

ВИЗНАЧЕННЯ МОМЕНТУ ІНЕРЦІЇ ФІЗИЧНОГО МАЯТНИКА ЗА ДОПОМОГОЮ МАТЕМАТИЧНОГО МАЯТНИКА ЗМІННОЇ ДОВЖИНИ

Мета роботи: вивчення коливального руху фізичного маятника і визначення його моменту інерції.

Прилади й матеріали: лабораторна установка для визначення моменту інерції фізичного маятника, лінійка.

Теоретичні відомості

Момент інерції являє собою скалярну фізичну величину, яка є мірою інертності фізичного тіла, що обертається навколо конкретної осі. При цьому другий закон динаміки для обертального руху має вигляд:

$$\vec{M} = I\vec{\alpha}, \quad (1)$$

де \vec{M} – обертальний момент сили,

I – момент інерції,

$\vec{\alpha}$ – кутове прискорення.

Момент інерції I тіла відносно заданої осі виражається як сума моментів інерції матеріальних точок, що складають це тіло:

$$I = \sum_k I_k, \quad (2)$$

де I_k – момент інерції k -ої матеріальної точки:

$$I_k = m_k r_k^2, \quad (3)$$

де m_k – маса k -ої точки,

r_k – відстань від k -ої матеріальної точки до осі обертання.

В загальному випадку вираз (2) має вигляд:

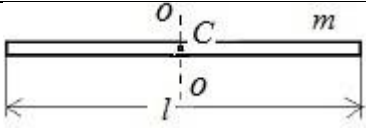
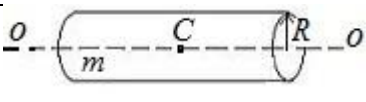
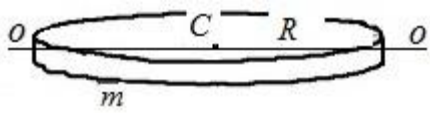
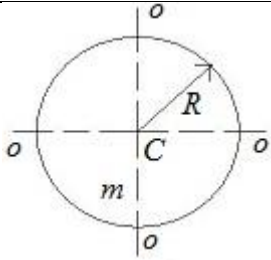
$$I = \int r^2 dm.$$

(4)

За допомогою виразу (4) легко визначити моменти інерції деяких симетричних тіл відносно головної осі обертання, що проходить через центр тяжіння C . Приклади розрахунків наведено в таблиці 1.

За допомогою виразу (4) легко визначити моменти інерції деяких симетричних тіл відносно головної осі обертання, що проходить через центр тяжіння C . Приклади розрахунків наведено в таблиці 1.

Таблиця 1

1.	стержень довжини l		$I = \frac{1}{12} ml^2$
2.	циліндр радіусом R диск радіусом R		$I = \frac{1}{2} mR^2$
3.	диск радіусом R		$I = \frac{1}{4} mR^2$
4.	куля радіусом R		$I = \frac{2}{5} mR^2$
5.	сфера радіусом R		$I = \frac{2}{3} mR^2$

Момент інерції тіла відносно довільної осі обертання визначається за допомогою теореми про перенос паралельних осей (теорема Штейнера):

$$I = I_0 + mr^2,$$

(5)

де I_0 – момент інерції тіла відносно осі, що проходить через центр мас,

r – відстань від цієї осі до паралельної їй довільної осі,

m – маса тіла.

В даній лабораторній роботі тілом обертання є фізичний маятник, що являє собою тверде тіло, яке здійснює під дією сили тяжіння коливання навколо горизонтальної осі, розташованої вище центра мас (рис. 1).

При відхиленні маятника від положення рівноваги на кут φ виникає момент сили M , що повертає маятник до положення рівноваги:

$$M = -mga \sin \varphi, \quad (6)$$

де m – маса маятника,

g – прискорення вільного падіння,

a – відстань від осі обертання до центра мас маятника,

φ – кут відхилення маятника від положення рівноваги.

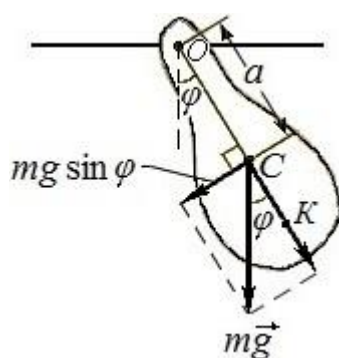


Рисунок 1. Модель фізичного маятника.

Основне рівняння динаміки обертального руху (1) з урахуванням (6) набуває вигляду:

$$I \cdot \frac{d^2 \varphi}{dt^2} = -mga \sin \varphi. \quad (7)$$

Якщо кут φ малий, то $\sin \varphi \approx \varphi$ (у радіанах), тоді диференціальне рівняння руху маятника можна записати як:

$$\frac{d^2 \varphi}{dt^2} + \omega^2 \varphi = 0. \quad (8a)$$

Розв'язок цього рівняння є законом руху фізичного маятника:

$$\varphi = \varphi_m \cos(\omega t + \varphi_0), \quad (8b)$$

де φ_m – максимальне кутове зміщення (амплітуда),

φ_0 – початкова фаза,

$$\omega = \sqrt{\frac{mga}{I}} \text{ – циклічна частота } \left(\omega = \frac{2\pi}{T} \right),$$

$$T = \frac{2\pi}{\omega} \text{ – період коливань.}$$

Звідси

$$T = 2\pi \sqrt{\frac{I}{mga}}. \quad (9)$$

Позначивши $\frac{I}{ma}$ як

$$L = \frac{I}{ma},$$

одержимо:

$$T_\phi = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g}}, \quad (10)$$

де L – зведена довжина фізичного маятника. Точка K на продовженні прямої OC , рис. 1, що знаходиться від осі підвісу на відстані зведеної довжини, $OK=L$, називається центром гойдання фізичного маятника.

Вираз (10) збігається з формулою, що визначає період коливань математичного маятника:

$$T_m = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}, \quad (11)$$

де ℓ – довжина нитки математичного маятника.

Якщо період коливань фізичного маятника T_ϕ і період коливань математичного маятника T_m однакові, то

$$T_\phi = T_m \Rightarrow L = \ell \Rightarrow I = ma\ell. \quad (12)$$

Зведена довжина фізичного маятника L дорівнює довжині ℓ такого математичного маятника, період коливань якого дорівнює періоду коливань даного фізичного маятника.

Рівняння (12) дозволяє визначити момент інерції фізичного маятника. Для цього необхідно розглянути фізичний маятник та математичний маятник, періоди коливань яких збігаються, і визначити довжину математичного маятника ℓ , масу фізичного маятника m та відстань a від осі обертання до центра мас фізичного маятника.

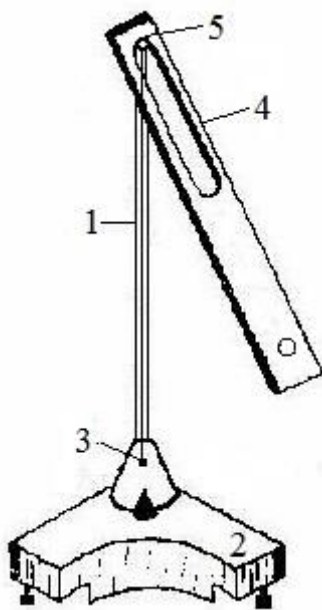


Рисунок 2.
Макет установки.

Лабораторна установка для визначення моменту інерції фізичного маятника (рисунок 2) складається з вертикальної стійки 1, укріпленої на підпорі 2. Фізичний маятник 4 у вигляді пластини з отвором обертається навколо осі 5. Математичний маятник являє собою металеву кульку 3, підвішену на нитці в точці підвісу фізичного маятника.

Якщо одночасно привести в рух обидва маятники і поступово змінювати довжину ℓ математичного маятника, то можна добитися синхронності їх коливань. При цьому $T_\phi = T_m$. А це означає, що довжина ℓ математичного маятника буде дорівнювати зведеній довжині

фізичного маятника L :

$$I = m a \ell \quad . \quad (12a)$$

Послідовність виконання роботи

1. Відхиливши в один бік фізичний і математичний маятники і відпустивши їх, реалізувати коливання маятників.

2. Регулюючи довжину математичного маятника, домогтися синхронності періоду коливань маятників. Можна вважати, що періоди коливань однакові, якщо розбіжність маятників не спостерігається протягом 10 коливань.

3. Виміряти довжину математичного маятника ℓ та відстань a від осі обертання фізичного маятника до центра мас. Центр мас фізичного маятника зазначений на пластині 4 точкою ЦМ. Маса фізичного маятника зазначена на його тілі.

4. Виконати досліди для другої точки підвісу, розташованої в протилежній частині пластини.

5. Результати вимірювань внести в таблицю 2.

6. За формулою (12a) розрахувати моменти інерції I_1 і I_2 фізичного маятника відносно кожної осі підвісу.

7. Обчислити відносну й абсолютну похибки.

Звіт за виконану роботу

1. Робоча формула:

$$I = m \cdot a \cdot \ell - \text{момент інерції.}$$

1.1. Величини, що вимірюються:

a – відстань від осі обертання до центра мас, $[a] = \text{м}$.

ℓ – довжина математичного маятника, $[\ell] = \text{м}$.

1.2. Табличні величини:

$$g = 9,81 \frac{\text{М}}{\text{с}^2}, \quad m = 3,455 \text{ кг},$$

1.3. Величина, що обчислюється:

$$I - \text{момент інерції, } [I] = \text{кг} \cdot \text{м}^2 .$$

2. Результати експерименту записати до таблиці 2:

Таблиця 2

N	a, м	ℓ, м	I
перша точка підвісу			
1			$I_1 =$
друга точка підвісу			
2			$I_2 =$

3. Обробка результатів експерименту:

3.1. Визначення за формулою (13) моменту інерції для першої точки підвісу:

$$I_1 = m \cdot a_1 \cdot \ell_1 =$$

3.2. Визначення за формулою (13) моменту інерції для другої точки підвісу:

$$I_2 = m \cdot a_2 \cdot \ell_2 =$$

4. Висновки:

Контрольні питання

1. Що називається коливаннями?
2. Які коливання називаються гармонійними?
3. Нарисувати графік гармонічних коливань. На рисунку покажіть амплітуду, період, початкову фазу.
4. Що називають пружинним, фізичним і математичним маятником?
5. Дати визначення зведеної довжини фізичного маятника.
6. Дати визначення гармонійних коливань. Навести приклади.

7. За яких умов реальний маятник (тіло на нитці) можна вважати математичним маятником?
8. Записати формули для обчислення моменту інерції: диска, тонкого стержня, кулі.
9. Маятникові годинники точно йдуть влітку. Як зміниться хід годинника взимку?
10. Чи може вектор кутового прискорення при обертанні тіла бути направленим в один бік, а вектор моменту сили – в інший?
11. Які перетворення енергії відбуваються при коливаннях фізичного маятника?
12. У яких точках траєкторії кінетична енергія маятника максимальна? Мінімальна? Чому?
13. З гірки скочуються два циліндри однакових мас та однакового діаметра. Один циліндр пустотілий. Який із циліндрів скотиться раніше?
14. Точний маятниковий годинник принесли з екватора на полюс. Чи зміниться точність годинника?