

Лекция №3

Работа газа при различных процессах.

В предыдущих лекциях мы получили, что общая формула для работы, которую выполняет газ, имеет вид

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV. \quad (1)$$

Геометрический смысл этой формулы состоит в том, что работа определяется площадью криволинейной трапеции в осях (p, V) . Т.о., в общем случае, для нахождения работы нужно производить интегрирование. Рассмотрим конкретные примеры.

Работа газа при изохорном процессе.

Для изохорного процесса $V = const$, следовательно $dV = 0$. Это означает, что при изохорном процессе газ работу не выполняет

$$A = 0.$$

Работа при изобарном расширении идеального газа

Работу, совершаемую газом при изобарном расширении, можно найти, подставив постоянное значение давления газа p_1 (или p_2 , так как $p_1 = p_2$) в уравнение (1). Получим

$$A_{12} = \int_{V_1}^{V_2} p_1 dV = p_1(V_2 - V_1) = p_1 \Delta V. \quad (2)$$

Эта работа численно равна площади прямоугольника $V_1 1 2 V_2$ на Vp -диаграмме изобарного процесса (рис. 1).

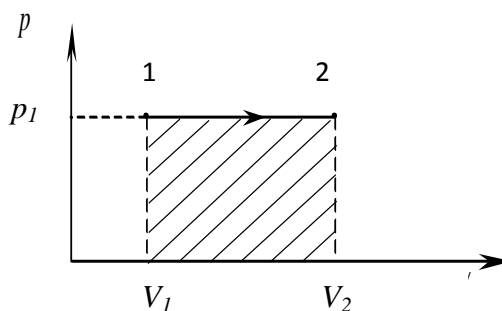


Рис. 1

Выясним физический смысл универсальной газовой постоянной R .

Из уравнения состояния идеального газа находим $p_1 V_1 = \nu \cdot R \cdot T_1$, $p_2 V_2 = \nu \cdot R \cdot T_2$. Сравнивая это уравнение с (2), видим, что

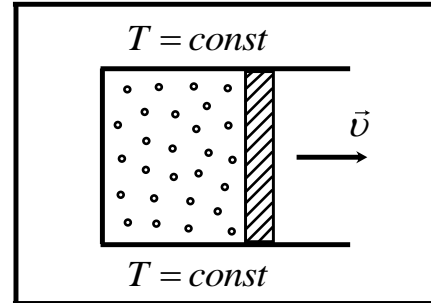
$$A_{12} = \nu R (T_2 - T_1). \quad (3)$$

Если $\Delta T = 1$ К и количество вещества газа равно одному молю, то работа $A = R$, т.е. универсальная газовая постоянная R численно равна работе расширения одного моля идеального газа, когда он нагревается на один кельвин при постоянном давлении.

Работа при изотермическом расширении идеального газа

Для осуществления изотермического расширения газа, находящегося в цилиндре с подвижным поршнем, температура стенок цилиндра должна поддерживаться постоянной с помощью термостата (рис.2), а поршень должен перемещаться настолько медленно, чтобы газ все время находился в тепловом равновесии со стенками.

При изотермическом расширении количество теплоты, получаемое газом от термостата, равно работе, совершаемой газом: $\delta Q = \delta A$. Это следует из уравнения $\delta Q = \nu C_V dT + \delta A$ при $T = const$.



Термостат

Рис.2

Из уравнения состояния идеального газа

$$p = \nu \frac{RT}{V}. \quad (4)$$

Тогда работа при изотермическом процессе ($T = const$) рассчитывается как:

$$A = \int_{V_1}^{V_2} p dV = \nu RT \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = \nu RT \ln V \Big|_{V_1}^{V_2} = \nu RT (\ln V_2 - \ln V_1).$$

Окончательно получаем

$$A_{12} = \nu RT \ln \frac{V_2}{V_1}. \quad (5)$$

Если учесть, что $V_1 = \frac{\nu RT_1}{p_1}$ и $V_2 = \frac{\nu RT_2}{p_2}$, то $\frac{V_2}{V_1} = \frac{\nu RT_2}{p_2} \cdot \frac{p_1}{\nu RT_1} = \frac{p_1}{p_2}$.

Это же самое можно получить из уравнения изотермического процесса

$$p_1 V_1 = p_2 V_2, \text{ тогда } p_1 / p_2 = V_2 / V_1.$$

Т.о. получаем другую формулу для работы газа при изотермическом процессе

$$A_{12} = \nu RT \ln \left(\frac{p_1}{p_2} \right). \quad (6)$$

Работа при адиабатном процессе

Работу расширения газа при адиабатном процессе найдем, подставив в (1) давление $p = \frac{const}{V^\gamma}$. Константу можно найти из уравнения адиабатного процесса, положив ее равной произведению $p_1 V_1^\gamma$ в начальном состоянии 1:

$$\begin{aligned} A &= \int_{V_1}^{V_2} p dV = p_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V^\gamma} = \\ &= p_1 V_1^\gamma \left. \frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \right|_{V_1}^{V_2} = \frac{p_1 V_1^\gamma}{1-\gamma} (V_2^{-\gamma+1} - V_1^{-\gamma+1}) = \frac{p_1 V_1 V_1^{\gamma-1}}{\gamma-1} (V_1^{1-\gamma} - V_2^{1-\gamma}) = \\ &= \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} (1 - V_1^{\gamma-1} V_2^{1-\gamma}) = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} \left(1 - \frac{V_1^{\gamma-1}}{V_2^{\gamma-1}} \right). \end{aligned}$$

Т.о.

$$A_{12} = \frac{p_1 V_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (7)$$

С учетом $p_1 V_1 = \nu R T_1$, можно написать и другую формулу

$$A_{12} = \frac{\nu R T_1}{\gamma-1} \left[1 - \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \right]. \quad (8)$$

Так как $p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma$ имеем $\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma = \frac{p_2}{p_1}$ или $\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{-1} = \frac{p_2}{p_1} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{-1}$, т.е.

$\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \frac{p_2 V_2}{p_1 V_1}$ или $\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \frac{\nu R T_2}{\nu R T_1}$. Тогда $\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} = \frac{T_2}{T_1}$ и можем переписать (8)

$$A_{12} = \frac{\nu R T_1}{\gamma-1} \left[1 - \frac{T_2}{T_1} \right] = \frac{\nu R}{\gamma-1} [T_1 - T_2]. \quad (9)$$

Заметим, что из первого начала термодинамики следует, что $\delta A = -dU$, но $dU = \nu C_V dT$, следовательно

$$A_{12} = -\int \nu C_V dT = -\nu C_V (T_2 - T_1) = \nu C_V (T_1 - T_2). \quad (10)$$

Основное уравнение молекулярно-кинетической теории (МКТ).

Давлением называется отношение нормальной компоненты силы F_{\perp} , действующей на стенку сосуда, к площади поверхности стенки S :

$$P = \frac{F_{\perp}}{S}. \quad (11)$$

В СИ давление измеряется в *паскалях* (Па). Один *паскаль* – давление с силой один *ньютон* на площадку в один квадратный метр: $\text{Па} = \text{Н} / \text{м}^2$.

Пусть газ заключен в прямоугольный сосуд длиной l и площадью поперечного сечения S (рис.1). Найдем силу F_{\perp} , действующую на левую стенку. Для этого умножим среднее значение силы \bar{F}_x (обозначается чертой над символом), действующей на эту стенку со стороны одной молекулы, на число N молекул, находящихся в сосуде:

$$F_{\perp} = N \bar{F}_x. \quad (12)$$

По второму закону Ньютона, сила F_x равна изменению соответствующей компоненты импульса Δp_x молекулы время Δt

$$F_x = \frac{\Delta p_x}{\Delta t}, \quad (13)$$

где

$$\Delta p_x = m_0 v_x - (-m_0 v_x) = 2 m_0 v_x,$$

m_0 - масса одной молекулы.

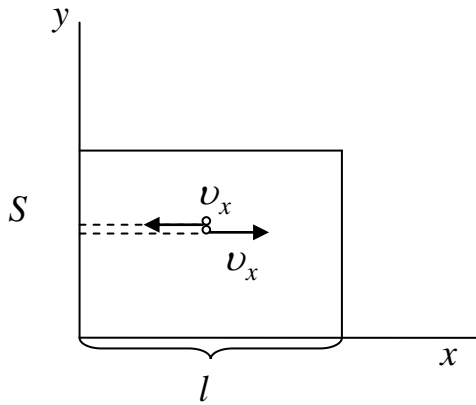


Рис.1

Так как молекулы газа движутся в обоих направлениях оси x , то можно считать, что только половина молекул соударяется со стенкой за промежуток времени Δt , необходимый ей для преодоления расстояния l (длина сосуда), тогда

$$F_{\perp} = \frac{N}{2} \frac{\Delta p_x}{\Delta t}. \quad (14)$$

Подставим сюда $\Delta p_x = 2 m_0 v_x$, а также учтем тот факт, что за время Δt со стенкой столкнутся молекулы удаленные от нее на расстоянии $l = v_x \Delta t$ тогда $\Delta t = l / v_x$, отсюда получаем

$$F_{\perp} = \frac{N}{2} \frac{\Delta p_x}{\Delta t} = \frac{N}{2} \frac{2 m_0 v_x}{l / v_x} = N \frac{m_0 v_x^2}{l}. \quad (15)$$

Поскольку все направления движения молекул равновероятны, то $\overline{v_x^2} = \overline{v_y^2} = \overline{v_z^2}$ и $v^2 = \overline{v_x^2} + \overline{v_y^2} + \overline{v_z^2} = 3 \overline{v_x^2}$, откуда $\overline{v_x^2} = v^2 / 3$. Получаем,

$$P = \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot m_0 \overline{v^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot m_0 \overline{v^2} = \frac{1}{3} \cdot n \cdot m_0 \overline{v^2}, \quad (16)$$

Уравнение (16) есть основное уравнение молекулярно-кинетической теории.

$$P = \frac{1}{3} \cdot n \cdot m_0 \overline{v^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{N}{V} \cdot m_0 \overline{v^2} = \frac{1}{3} \cdot \frac{m \overline{v^2}}{V},$$

где $m = Nm_0$ - масса всех молекул, т.е. масса газа. Тогда имеем

$$PV = \frac{1}{3} \cdot m \overline{v^2}. \quad (17)$$

Умножим и разделим второй множитель на 2, тогда $PV = \frac{1}{3} \cdot m \overline{v^2} = \frac{2}{3} \cdot \frac{m \overline{v^2}}{2}$.

Окончательно получаем

$$PV = \frac{2}{3} \cdot \bar{E}, \quad (18)$$

где $\bar{E} = m \overline{v^2} / 2 = Nm_0 \overline{v^2} / 2$ - суммарная средняя кинетическая энергия всех молекул газа.

Внутренняя энергия идеального газа

В предыдущем параграфе мы получили следующее выражение (у-е МКТ)

$$PV = \frac{1}{3} \cdot m \overline{v^2}.$$

Вспользуемся теперь уравнением состояния идеального газа (уравнением Клайперона-Менделеева) $PV = \frac{m}{\mu} RT$, тогда находим $\frac{m}{\mu} RT = \frac{1}{3} \cdot m \overline{v^2}$ или $\overline{v^2} = \frac{3RT}{\mu}$. Извлекаем квадратный корень и учтем, что $\sqrt{\overline{v^2}} = \overline{v_{кв}}$ называют средней квадратичной скоростью, тогда

$$\overline{v_{кв}} = \sqrt{\frac{3RT}{\mu}}.$$

Учтем что μ - молярная масса газа, то $\mu = m_0 \cdot N_A$, где m_0 - масса одной молекулы газа, а $N_A = 6,02 \cdot 10^{23} \text{ моль}^{-1}$ - постоянная Авогадро и $R = k \cdot N_A$, тогда

$$\overline{v_{кв}} = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot N_A \cdot T}{m_0 \cdot N_A}} = \sqrt{\frac{3 \cdot k \cdot T}{m_0}}.$$

Отсюда, среднее значение кинетической энергии молекулы газа

$$\overline{W_{к}} = \frac{m_0 \cdot \overline{v^2}}{2} = \frac{m_0}{2} \frac{3 \cdot k \cdot T}{m_0} = 3kT / 2.$$

Поскольку материальная точка имеет три степени свободы, на каждую из них приходится энергия

$$\overline{W}_{\text{т.св}} = kT / 2.$$

Закон равномерного распределения энергии по степеням свободы молекул утверждает, что *в состоянии термодинамического равновесия на каждую степень свободы одной молекулы приходится средняя энергия, равная $kT/2$* .

Каждая молекула газа, в состав которой входит более одного атома, имеет, подобно твердому телу, кроме поступательных еще и вращательные степени свободы. Энергия вращения молекулы около каждой из ее главных осей инерции, согласно закону равнораспределения энергии, составляет $kT/2$. Полная же энергия молекулы равна

$$\overline{W}_k = \frac{i}{2} kT,$$

где $i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}}$ – число ее поступательных и вращательных степеней свободы.

Молекулы одноатомного газа имеют три поступательные степени свободы, на каждую из которых, по закону равнораспределения энергии, в среднем приходится энергия $kT/2$, так что внутренняя энергия идеального газа

$$U = \nu N_A \left(\frac{i}{2} kT \right) = \frac{i}{2} \nu RT.$$

По определению молярной теплоемкости при постоянном объеме,

$$C_V = \frac{1}{\nu} \frac{dU}{dT} = \frac{1}{\nu} \frac{d}{dT} \left(\frac{i}{2} \nu RT \right) = \frac{i}{2} R.$$

Согласно уравнению Майера

$$C_p = C_V + R,$$

тогда

$$C_p = \frac{i}{2} R + R = R \left(\frac{i}{2} + 1 \right).$$

Для показателя адиабаты $\gamma = C_p / C_V$ получим следующее выражение

$$\gamma = R \left(\frac{i}{2} + 1 \right) : \frac{i}{2} R = \frac{i/2 + 1}{i/2} = \frac{i+2}{i} = 1 + \frac{2}{i}.$$

Одноатомные молекулы имеют только три поступательных степеней свободы. Поэтому для таких молекул

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} = 3 + 0 = 3.$$

Двухатомные молекулы, как следует из опыта, имеют дополнительно две

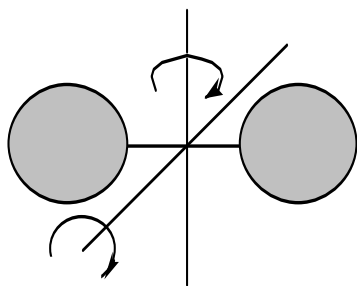


Рис.2

вращательные степени свободы – вокруг осей, перпендикулярных друг другу и оси симметрии молекулы, проходящей через центры атомов (см. рис.2). На каждую из них приходится энергия $kT/2$, поэтому

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} = 3 + 2 = 5$$

Молекулы с числом атомов $n \geq 3$ обнаруживают все три вращательные степени свободы. У многоатомных газов

$$i = i_{\text{пост}} + i_{\text{вр}} = 3 + 3 = 6.$$

Получаем следующую таблицу

X-атомный газ	$i_{\text{пост}}$	$i_{\text{вр}}$	i
одноатомный газ	3	0	3
двухатомный газ	3	2	5
многоатомный газ	3	3	6